Universität Stuttgart
Institutsverbund Informatik
Hertrampf—Schröter & Luttenberger

Sommersemester 2004
Aufgabenblatt 1
20. April 2004

Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Abgabetermin: **Donnerstag**, den **29. April 2004** bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 *Chomsky-Grammatiken* (8 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen L_i möglichst einfache und kurze Grammatiken G_i an.

(a) $L_1 = \{a^n \mid n \geq 1\}$

(b) $L_2 = \left\{a^n b^k \mid n \geq 1, k \geq 1\right\}$

(c) $L_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

(d) $L_4 = \left\{a^n b^n c^k \mid n \geq 1, k \geq 1\right\}$

Begründen Sie ausführlich, dass $L_4 = L(G_4)$ gilt. Ordnen Sie Ihren Grammatiken entsprechende Typen der Chomsky-Hierarchie zu.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Chomsky-Grammatiken*

(a) $S \rightarrow aS \mid a$ (Typ 3)

(b) $S \rightarrow aS \mid aB, B \rightarrow bB \mid b$ (Typ 3)

(c) $S \rightarrow aSb \mid ab$ (Typ 2)

(d) $S \rightarrow AC, A \rightarrow aAb \mid ab, C \rightarrow cC \mid c$ (Typ 2)

Aufgabe 2 *Monoide* (8 Punkte)

Eine algebraische Struktur $(M, \circ, 1)$ heißt Monoid, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $1 \in M$
- $\circ : M \times M \rightarrow M$
- $\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- $\forall a \in M : 1 \circ a = a \circ 1 = a$

Offensichtlich ist für jede Menge M die Struktur $(M^*, \circ, \varepsilon)$ mit $a \circ b = ab$ ein Monoid, das sogenannte freie Monoid. Eine Teilmenge $S \subset M^*$ bildet ein Submonoid zu $(M^*, \circ, \varepsilon)$, falls $(S, \circ|_{S \times S}, \varepsilon)$ ein Monoid ist. Dabei ist $\circ|_{S \times S}$ die Restriktion von $\circ$ auf $S \times S$. $X \subset S$ erzeugt das Monoid S, falls $S = X^*$ gilt.
Sei $S \subset M^*$ ein Submonoid. Zeigen Sie, dass $X := (S \setminus \{\varepsilon\}) \setminus (S \setminus \{\varepsilon\})^2$ das Submonoid S erzeugt. Verwenden Sie für eine der Richtungen Induktion über die Wortlänge. Zeigen Sie weiterhin, dass X unter allen Erzeugern Y von S der kleinste bezüglich Mengeninklusion ist, d.h. $X \subseteq Y$.

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Monoide*

- **Behauptung:** $X^* = S$

  Beweis:

  (i) $X^* \subseteq S$
  Da S ein Submonoid ist, gilt $\varepsilon \in S$. Aus $X \subset S$ und der Abgeschlossenheit von S folgt unmittelbar $X^* \subseteq S$.

  (ii) $X^* \supseteq S$
  Vollständige Induktion über die Länge n der Wörter $w \in S$.
  Induktionsanfang: $n = 0$
  ε ist das einzige Wort aus S der Länge 0. Weiterhin gilt auch $\varepsilon \in X^*$.
  Induktionsvoraussetzung: Für alle Wörter $w \in S$ mit $|w| \leq n$ gilt $w \in X^*$.
  Induktionsschritt: $n \to n + 1$
  Sei $w \in S$ mit $|w| = n + 1$.

  * $w \in X$. Daraus folgt unmittelbar $w \in X^*$.
  * $w \notin X$. Aus $w \in S \setminus X$ folgt $w \in (S \setminus \{\varepsilon\})^2$, d.h. es existieren zwei Wörter $u_1, u_2 \in S \setminus \{\varepsilon\}$, sodaß $w = u_1 u_2$ und $|u_i| \leq n$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $u_i \in X^*$, und somit auch $w = u_1 u_2 \in X^*$.

  Da für alle Wörter $w \in S$ auch $w \in X^*$ folgt, gilt $X^* \supseteq S$.

- **Behauptung:** X ist unter allen Erzeugern Y von S der kleinste bezüglich Mengeninklusion, d.h. $X \subseteq Y$.

  Beweis: Sei $Y \subset X$ ein Erzeuger von S und $w \in X \setminus Y$. Jede Faktorisierung von w über Y muss daher aus mindestens zwei Elementen aus Y bestehen. Insbesondere folgt also der Widerspruch $w \in (S \setminus \{\varepsilon\})^2$. Daher folgt $X \subseteq Y$.