Universität Stuttgart
Institutsverbund Informatik
Hertrampf—Schröter & Luttenberger

Sommersemester 2004
Aufgabenblatt 2
27. April 2004

Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Abgabetermin: **Mittwoch**, den **05. Mai 2004** bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 3 *Grammatiken* (8 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $\Sigma = \{1, +, (,),^{-1}\}$
- $V = \{S\}$
- $P = \{S \to 1 + (S)^{-1}, S \to 1\}$

(a) Interpretieren Sie die Wörter der Sprache $L(G)$ im üblichen mathematischen Sinn. Geben Sie eine Rekursionsgleichung für die beschriebene Zahlenfolge an. Bestimmen Sie, gegen welchen Grenzwert die Folge konvergiert.

(b) Seien $F_0 := 1, F_1 := 1, F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ die Fibonacci-Zahlen. Gegen welchen Wert konvergiert $\frac{F_n}{F_{n+1}}$? Geben Sie eine Grammatik für die Folge $\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Modifizieren Sie dazu die Grammatik aus (a) in geeigneter Weise.

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *Grammatiken*

(a) $L(G) = \left\{1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{F_{n+1}}{F_n} \mid n \geq 0\right\}$ bzw. $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ mit $a_0 = 1$

Offensichtlich gilt $\forall n\colon a_n \geq 1$. Daraus folgt $\forall n\colon a_n \leq 2$ denn $1 \leq a_n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1} \leq 2$. Die Folge $a_{2\cdot n}$ ist streng monoton wachsend, $a_{2\cdot n+1}$ ist streng monoton fallend (Induktion über n). Beide Folgen konvergieren somit und die Grenzwerte liegen in $[1, 2]$. Beide Grenzwerte erfüllen $a = 1+\frac{1}{a}$ und somit $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, insbesondere gilt daher $a_n \to a$.

(b) Damit folgt $\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $S \to (A)^{-1}, A \to 1 + (A)^{-1} \mid 1$

Aufgabe 4 *Endliche Sprachen* (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache durch eine reguläre Grammatik erzeugt werden kann.

Aufgabe 4 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Sprachen*

Sei $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ mit $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma^*$ eine endliche Sprache. Seien $w_1 = u_{1_1}u_{1_2}\ldots u_{1_l}, w_2 = u_{2_1}u_{2_2}\ldots u_{2_m}, \ldots, w_n = u_{n_1}u_{n_2}\ldots u_{n_o}$ mit $u_{i_j} \in \Sigma$. Dann wird L erzeugt durch die reguläre Grammatik:

$S \to u_{1_1}U_{1_2}, \quad U_{1_2} \to u_{1_2}U_{1_3}, \quad \ldots, \quad U_{1_l} \to u_{1_l},$
$S \to u_{2_1}U_{2_2}, \quad U_{2_2} \to u_{2_2}U_{2_3}, \quad \ldots, \quad U_{2_m} \to u_{2_m},$
$\vdots$
$S \to u_{n_1}U_{n_2}, \quad U_{n_2} \to u_{n_2}U_{n_3}, \quad \ldots, \quad U_{n_o} \to u_{n_o}$

mit $S, U_{i_j} \in V$.

Aufgabe 5 *Reguläre Grammatiken* (8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w$ ist durch 5 teilbare Zahl (im Dreiersystem) ohne führende Nullen$\}$. Konstruieren Sie eine reguläre Grammatik, die L erzeugt. Begründen Sie Ihre Konstruktion ausführlich!

Aufgabe 5 **(Lösungsvorschlag)** *Reguläre Grammatiken*

Die Sprache L kann von folgender Grammatik erzeugt werden:

$S \to 0 \mid 1R_1 \mid 2R_2$
$R_0 \to 0R_0 \mid 1R_1 \mid 2R_2 \mid 0$
$R_1 \to 0R_3 \mid 1R_4 \mid 2R_0 \mid 2$
$R_2 \to 0R_1 \mid 1R_2 \mid 2R_3$
$R_3 \to 0R_4 \mid 1R_0 \mid 2R_1 \mid 1$
$R_4 \to 0R_2 \mid 1R_3 \mid 2R_4$

Eine Satzform wR_i mit $w \in \{0,1,2\}^*$ und $i \in \{0,\ldots,4\}$ bedeutet dabei, dass w interpretiert als Zahl im Dreiersystem bei Division durch 5 den Rest i ergibt.

Aufgabe 6 *Kontextfreie Grammatiken* (8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0 \wedge n = |l - m|\}$. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik, die L erzeugt. Begründen Sie Ihre Konstruktion ausführlich!

Aufgabe 6 **(Lösungsvorschlag)** *Kontextfreie Grammatiken*

Aus $n = |l - m|$ folgt $n = l - m$ falls $l \geq m$ und $n = m - l$ falls $m \geq l$. Damit gilt dann $l = m + n$ bzw. $m = l + n$. Wir konstruieren also 2 Grammatiken und vereinigen diese.

Grammatik für $l = m + n$:
$S_1 \to aS_1c \mid S_1'$
$S_1' \to aS_1'b \mid \varepsilon$

Grammatik für $m = l + n$:
$S_2 \to S_lS_r$
$S_l \to aS_lb \mid \varepsilon$
$S_r \to bS_rc \mid \varepsilon$

Wir vereinigen diese Grammatiken mit $S \to S_1 \mid S_2$.