Universität Stuttgart
Institutsverbund Informatik
Hertrampf—Schröter & Luttenberger

Sommersemester 2004
Aufgabenblatt 3
11. Mai 2004

Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Abgabetermin: **Mittwoch**, den **19. Mai 2004** bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 7 *Endliche Automaten* (10 Punkte)

Sei A_1 ein deterministischer endlicher Automat mit n Zuständen. Zeigen Sie, dass $L(A_1)$ genau dann unendlich ist, wenn der Automat A_1 ein Wort w der Länge $n \leq |w| < 2n$ akzeptiert.

Aufgabe 7 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Automaten*

($\Rightarrow$) Sei $L(A_1)$ unendlich.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $w \in L(A_1)$ mit $|w| > n$, q_0 der Startzustand von A_1 und q_f der Endzustand nach Lesen des Wortes w. Da $|w| > n$ ist, wird während des Lesevorgangs mindestens ein Zustand mehrfach durchlaufen. Das heißt, dass der Lesepfad mindestens einen oder auch mehrere Kreise enthält. Durch Entfernen eines Kreises erhält man ein neues Wort aus $L(A_1)$. Entfernt man alle Kreise bis auf einen, gilt für das so erkannte Wort w' entweder $n \leq |w'| < 2n$ oder $|w'| < n$. Im zweiten Fall kann der verbleibende Kreis mehrmals durchlaufen werden, bis ein Wort w'' mit $|w''| > n$ erkannt wird. Für w'' gilt dann $|w''| < 2n$.

($\Leftarrow$) Sei $w \in L(A_1)$ und $n \leq |w| < 2n$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien q_0 der Startzustand von A_1 und q_f der Endzustand nach Lesen des Wortes w, d.h. $q_0 w \Rightarrow^* q_f$. Beim Lesen von w durchläuft der Automat $|w|+1$ Zustände. Da $|w|+1 > n$, muß während des Lesens von w mindestens ein Zustand q mehrmals durchlaufen werden. Das heißt, es gibt Wörter w_1, w_2, w_3 mit $w = w_1 w_2 w_3$ und $w_2 \neq \varepsilon$, so dass $q_0 w_1 \Rightarrow^* q$, $q w_2 \Rightarrow^* q$, und $q w_3 \Rightarrow^* q_f$. Daraus folgt jedoch, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ das Wort $w_1 w_2^k w_3$ erkannt wird. Damit ist $L(A_1)$ unendlich.

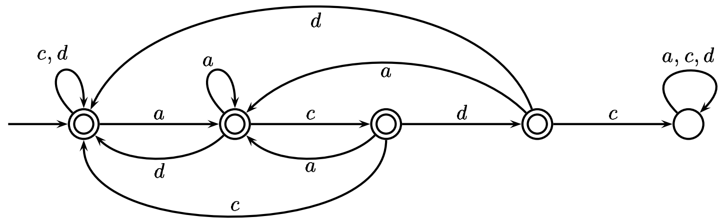
Aufgabe 8 *Endliche Automaten* (6 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A_2 an, der genau die Wörter der Sprache $L := \{w \in \{a, c, d\}^* \mid w \text{ enthält } \textbf{nicht} \text{ das Teilwort } acdc\}$ akzeptiert.

Hinweis: Als Lösung reicht die Angabe eines Diagramms.

Aufgabe 8 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Automaten*

Folgender Automat akzeptiert die gewünschte Sprache.



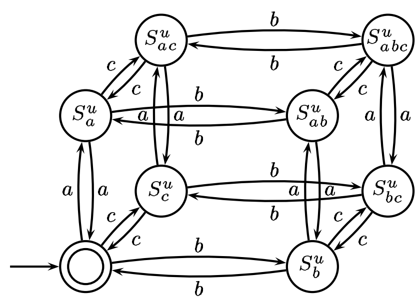
Aufgabe 9 *Endliche Automaten* (7 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A_3 an, der über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$ die Menge aller Wörter erkennt, bei denen die Anzahl der a-, b-, und c-Terminale jeweils gerade ist (zum Beispiel aa, $aacbbc$, $ccbb$, $bcbcbcbc$, $cccc$, $\dots$).

Hinweis: Als Lösung reicht die Angabe eines Diagramms.

Aufgabe 9 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Automaten*

Folgender Automat akzeptiert die gewünschte Sprache. Dabei bedeutet zum Beispiel S^u_{ac}, dass sich der Automat in einem Zustand befindet, in dem er eine ungerade Anzahl von a- und c-Terminalen gelesen hat.



Aufgabe 10 *Endliche Automaten* (7 Punkte)

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten $A_4 = (Z, \Sigma, q_0, \delta, E)$, der die Lösungen der linearen Gleichung $2 \cdot x_1 - x_2 = 3$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$ erkennt. Als Alphabet soll hierfür $\Sigma = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{N}^2$ verwendet werden. Ein Wort $w = w_0 \dots w_k \in \Sigma^*$ wird dann (analog zu einer Binärzahl) folgendermaßen umgewandelt:

$$I : \Sigma^+ \to \mathbb{N}^2 : w \mapsto \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} \cdot w_i$$

Zum Beispiel, für $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt dann $I(w) = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über $\mathbb{Z}^2$ soll der Automat somit folgende Sprache erkennen:

$$L := \{w \in \Sigma^+ \mid \left\langle I(w), \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3\}$$

Wählen Sie für die Konstruktion von A_4 die Zustände so, dass $Z \subset \mathbb{Z}$, $q_0 = 0$ und $E = \{3\}$. Konstruieren Sie den Automaten "rückwärts" beginnend mit dem Endzustand 3. Überlegen Sie sich hierfür, wie der Wert $\left\langle I(w), \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ inkrementell beim Lesen von w berechnet werden kann, und welche Informationen die Zustände des Automaten tragen.

Hinweis: Es reichen insgesamt weniger als 10 Zustände aus.

Aufgabe 10 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Automaten*

Sei $w = w_0 \dots w_l \in \Sigma^+$. Dann gilt
$\left\langle \sum_{i=0}^{l} 2^i \cdot w_{l-i}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{l} 2^{i-1} \cdot w_{l-i}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle w_l, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
Das bedeutet, dass sich der Automat nach dem Lesen von $w_0 \dots w_{l-1}$ in dem Zustand $\gamma := \left\langle \sum_{i=1}^{l} 2^{i-1} \cdot w_{l-i}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ befindet. Durch Lesen von w_l wird der Zustandswechsel $\gamma \overset{w_l}{\rightarrow} \gamma' = 2 \cdot \gamma + \left\langle w_l, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ vollzogen. Andererseits ergeben sich hieraus die Vorgänger zu $\left\{ \frac{\gamma' - \left\langle a, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \mid a \in \Sigma \right\} \cap \mathbb{Z}$. Damit erhält man:

- $\emptyset \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 3,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 3,\ 2 \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 3,\ 1 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 3$
- $1 \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 2,\ 0 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 2,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 2,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 2$
- $\emptyset \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 1,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 1,\ 1 \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 1,\ 0 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 1$
- $0 \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 0,\ -1 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 0,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 0,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} 0$
- $\emptyset \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} -1,\ \emptyset \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} -1,\ 0 \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} -1,\ -1 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\rightarrow} -1$

Der Automat sieht folgendermaßen aus: