Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Abgabetermin: **Mittwoch**, den **09. Juni 2004** bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 11 *Umwandlung ε-NFA in DFA* (3+3 = 6 Punkte)

Das Modell des NFAs soll so erweitert werden, dass es erlaubt ist, einen Zustandswechsel ohne Lesen eines Eingabezeichens vorzunehmen (ε-Zustandsübergänge). Dazu wird die aus der Vorlesung bekannte Definition von $\delta\colon Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ zu $\delta'\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ erweitert. Diese Klasse von endlichen Automaten soll mit ε-NFA bezeichnet werden. Insbesondere ist jeder NFA auch ein ε-NFA.

a) Zeigen Sie, dass es zu einem gegebenen ε-NFA stets einen DFA gibt, welcher dieselbe Sprache akzeptiert.

b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $k > 0$ beliebig, aber fest gewählt. Sei $\Pi_k(L)$ die Menge aller Wörter, welche aus den Wörtern aus L durch Entfernen der Zeichen auf den Positionen $\{n \cdot k \mid n > 0\}$ entstehen. Zum Beispiel, für $k = 3$ und $aacbbca \in L$ gilt $aabba \in \Pi_3(L)$. Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe a), dass $\Pi_k(L)$ regulär ist.

Aufgabe 12 *Kreuzproduktautomat* (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Für $w = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \in \Sigma^*$ sei $w^R := a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$ das gespiegelte Wort von w und $L^R := \{w \mid w^R \in L\}$.

Zeigen Sie, dass die Sprachen L^R und $L' := \{u \mid u \in L \wedge u^R \in L\}$ regulär sind.

Aufgabe 13 *Pumping Lemma* (4+4 = 8 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) $L_1 = \{a^i b^j \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon i \neq k \cdot j\}$

b) $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i > 0\}$

Aufgabe 14 *Reguläre Ausdrücke, Determinisierung, Minimierung* (2+2+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $01(11 + 00)^*1$.

a) Konstruieren Sie für den gegebenen regulären Ausdruck einen entsprechenden NFA.

b) Wandeln Sie den NFA aus Teilaufgabe a) in einen DFA um.

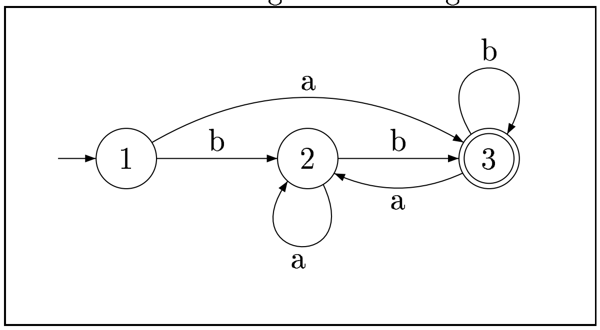
c) Minimieren Sie den DFA aus Teilaufgabe b).

Halten Sie sich bei allen Teilaufgaben möglichst genau an die in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und geben Sie jeden Teilschritt an.

Aufgabe 15 *Herleitung eines Regulären Ausdrucks aus einem DFA* (6 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem im Schöning auf den Seiten 38 und 39 beschriebenen Verfahren zu folgendem Automaten den entsprechenden regulären Ausdruck:

Abbildung 1: DFA2Reg



Verwenden Sie die vorgegebene Nummerierung der Zustände. Rechnen Sie anstatt mit den Mengen $R_{i,j}^k$ mit den entsprechenden regulären Ausdrücken $\alpha_{i,j}^k$, und vereinfachen Sie diese nach jedem Rechenschritt (vgl. auch Aufgabe 16). Schreiben Sie für festes k die regulären Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ als Matrix $\alpha^{(k)} = (\alpha_{i,j}^k)$. Hiermit gilt:

$$\underbrace{\alpha^{(k+1)}}_{n\times n \text{ Matrix}} = \underbrace{\alpha^{(k)}}_{n\times n \text{ Matrix}} + \underbrace{(\alpha_{i,k+1}^k)_{i\in\{1,\ldots,n\}}}_{n \text{ Spaltenvektor}}(\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \underbrace{(\alpha_{k+1,j}^k)_{j\in\{1,\ldots,n\}}}_{n \text{ Zeilenvektor}}$$

unter Verwendung der üblichen komponentenweisen Verknüpfung von Matrizen/Vektoren. Berechnen Sie zunächst die $n \times n$ Matrix

$$\underbrace{(\alpha_{i,k+1}^k)_i}_{n \text{ Spaltenvektor}} \quad (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \quad \underbrace{(\alpha_{k+1,j}^k)_j}_{n \text{ Zeilenvektor}}$$

in jedem Schritt, und addieren Sie diese zu der bereits berechneten Matrix $\alpha^{(k)}$.
Hinweis: Anstatt $a|b$ verwenden wir die Schreibweise $a + b$.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} (\varepsilon)^* \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,b & \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,a \\ \emptyset\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,b & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,a \\ \emptyset\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,b & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16 **(Zusatzaufgabe)** *Reguläre Ausdrücke und Kleene Algebren* (4+4 = 8 Punkte)

Eine *Kleene Algebra* ist eine algebraische Struktur $\mathcal{K} = (K, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$	(2) $a+b = b+a$	(3) $a+0 = a$	(4) $a+a = a$
(5) $(ab)c = a(bc)$	(6) $1a = a$	(7) $a1 = a$	
(8) $a(b+c) = ab+ac$	(9) $(a+b)c = ac+bc$	(10) $0a = 0$	(11) $a0 = 0$
(12) $1 + aa^\star \leq a^\star$	(13) $1 + a^\star a \leq a^\star$		
(14) $b + ax \leq x \Rightarrow a^\star b \leq x$	(15) $b + xa \leq x \Rightarrow ba^\star \leq x$		

wobei $\forall a, b \in K\colon a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ gilt. Hiermit folgt wegen (2) wie gewohnt $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b + a = b$.

(a) Zeigen Sie für allgemeine Kleene-Algebren, dass $d^\star$ der kleinste Präfixpunkt der Abbildungen $l\colon K \to K : x \mapsto 1 + dx$ und $r\colon K \to K : x \mapsto 1 + xd$ ist, d.h. es gilt $\forall c \in K\colon l(c) \leq c \Rightarrow d^\star \leq c$ und $\forall c \in K\colon r(c) \leq c \Rightarrow d^\star \leq c$. Verwenden Sie hierfür die Axiome (12) und (14) bzw. (13) und (15). Zeigen Sie außerdem, dass $dd^\star \leq d^\star$ und $d^\star d \leq d^\star$ gilt. Beachten Sie hierfür die Definition von $\leq$ und die Bedingungen (12) bzw. (13). Zeigen Sie schließlich mit den Eigenschaften (12) und (14) von *, dass $(d+1)^\star \leq d^\star$ und $d^\star \leq (d+1)^\star$ gilt.

(b) Mit Reg_Σ seien die regulären Ausdrücke über einem festen Alphabet Σ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}_\Sigma = (\mathrm{Reg}_\Sigma, |, \circ, ^*, \emptyset, \varepsilon)$ eine Kleene Algebra ist, wobei $\circ$ für die Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke steht. Was bedeutet $a \leq b$ für zwei reguläre Ausdrücke in diesem Fall? Zeigen Sie, dass in $\mathcal{R}_\Sigma$ in den Axiomen (12) und (13) sogar die Gleichheit gilt.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen * und *. Für * sind nur die oben geforderten Eigenschaften bekannt.