Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Abgabetermin: **Mittwoch**, den **09. Juni 2004** bis spätestens 12:00 Uhr.

Aufgabe 11 *Umwandlung ε-NFA in DFA* (3+3 = 6 Punkte)

Das Modell des NFAs soll so erweitert werden, dass es erlaubt ist, einen Zustandswechsel ohne Lesen eines Eingabezeichens vorzunehmen (ε-Zustandsübergänge). Dazu wird die aus der Vorlesung bekannte Definition von $\delta\colon Z\times\Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ zu $\delta'\colon Z\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ erweitert. Diese Klasse von endlichen Automaten soll mit ε-NFA bezeichnet werden. Insbesondere ist jeder NFA auch ein ε-NFA.

a) Zeigen Sie, dass es zu einem gegebenen ε-NFA stets einen DFA gibt, welcher dieselbe Sprache akzeptiert.

b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $k > 0$ beliebig, aber fest gewählt. Sei $\Pi_k(L)$ die Menge aller Wörter, welche aus den Wörtern aus L durch Entfernen der Zeichen auf den Positionen $\{n\cdot k \mid n > 0\}$ entstehen. Zum Beispiel, für $k=3$ und $aacbbca \in L$ gilt $aabba \in \Pi_3(L)$. Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe a), dass $\Pi_k(L)$ regulär ist.

Aufgabe 11 **(Lösungsvorschlag)** *Umwandlung ε-NFA in DFA*

a) Die Potenzmengenkonstruktion entspricht der gleichzeitigen "Überlagerung" aller durch das Lesen der bisherigen Eingabe erreichbaren Zustände. Wir erweitern die Potenzmengenkonstruktion um eine Tiefensuche entlang der ε-Kanten (vor und) nach jedem Schritt der Potenzmengenkonstruktion.
Sei $M = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$ ein ε-NFA. Wir konstruieren einen DFA M', der ebenfalls $L(M)$ akzeptiert. Dazu definieren wir für einen Zustand q die Menge ε-CLOSURE(q) als Menge aller Zustände r, so dass ein Pfad von q nach r existiert, der nur aus ε-Übergängen besteht. Entsprechend gilt für eine Menge Z von Zuständen $\varepsilon\text{-CLOSURE}(Z) = \bigcup_{q\in Z} \varepsilon\text{-CLOSURE}(q)$.
Wir definieren nun die Übergangsrelation $\hat{\delta}\colon Z \times (\Sigma\cup\{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ wie folgt:

(a) $\hat{\delta}(q,\varepsilon) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(q)$.

(b) $\hat{\delta}(q,a) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(Z')$, für $a \in \Sigma$ und $Z' = \{r \mid r \in \delta'(q,a) \vee (s \in \hat{\delta}(q,\varepsilon) \wedge r \in \delta'(s,a))\}$.

Damit ergibt sich $M' = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \tilde{\delta}, q_0, E')$, wobei

$$\tilde{\delta}(Z',a) = \bigcup_{q\in Z'} \hat{\delta}(z,a) \text{ für } a\in\Sigma, Z'\in\mathcal{P}(Z)$$

$$q_0 = S$$

$$E' = \begin{cases} \{Z' \subseteq Z \mid Z' \cap E \neq \emptyset\} \cup \{q_0\} & \text{falls } \varepsilon\text{-CLOSURE}(q_0) \cap E \neq \emptyset \\ \{Z' \subseteq Z \mid Z' \cap E \neq \emptyset\} & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

b) Wir erweitern die Zustandskomponenten um einen Zähler, der die Position des gelesenen Zeichens mod k angibt. Beim Lesen des k-ten Zeichens wird ein ε-Übergang eingeführt, was einem "Raten" des möglichen gelesenen Zeichens entspricht.

Für $k = 1$ gilt $\Pi_1(L) = \emptyset$, falls $L = \emptyset$, und $\Pi_1(L) = \{\varepsilon\}$, falls $L \neq \emptyset$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte daher $k > 1$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA zu L. Setze $\widetilde{Z} := Z \times \{0, \ldots, k-1\}$, $\widetilde{z}_0 := (z_0, 0)$ und $\widetilde{E} := E \times \{0, \ldots, k-1\}$. Schließlich sei:

$$\widetilde{\delta}((q,i),a) = \delta(q,a) \times \{i+1\} \text{ für } i = 0, \ldots, k-2 \text{ und } a \in \Sigma,\ q \in Z$$

und

$$\widetilde{\delta}((q,k-1),\varepsilon) = \delta(q,a) \times \{0\} \text{ für } a \in \Sigma,\ q \in Z$$

Der so erhaltene ε-NFA ist nach Teilaufgabe a) äquivalent zu einer regulären Sprache.

Aufgabe 12 *Kreuzproduktautomat* (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Für $w = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \in \Sigma^*$ sei $w^R := a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$ das gespiegelte Wort von w und $L^R := \{w \mid w^R \in L\}$.

Zeigen Sie, dass die Sprachen L^R und $L' := \{u \mid u \in L \wedge u^R \in L\}$ regulär sind.

Aufgabe 12 **(Lösungsvorschlag)** *Kreuzproduktautomat*

Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \delta_1, q_{01}, E_1)$ ein DFA, der die Sprache L akzeptiert. Sei $M_R = (Z, \Sigma, \tilde{\delta}, E_1, \{q_{01}\})$ der NFA, der aus M_1 durch Umkehren der Kanten und Vertauschen von Anfangs- und Endzuständen entsteht, also

$$q \in \tilde{\delta}(r,a) \Leftrightarrow r = \delta_1(q,a)$$

M_R akzeptiert die Sprache L^R (was eigentlich erst noch formal bewiesen werden müßte). Sei nun $M_2 = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta_2, q_{02}, E_2)$ der zu M_R entsprechende DFA. Wir konstruieren den Kreuzproduktautomaten M aus M_1 und M_2, der die Sprache $L(M_1) \cap L(M_2) = L \cap L^R = L'$ akzeptiert. Sei also

$$M = (Z \times \mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta, (q_{01}, q_{02}), E_1 \times E_2)$$

wobei

$$\delta((q,q'),a) = (\delta_1(q,a), \delta_2(q',a))$$

Aufgabe 13 *Pumping Lemma* (4+4 = 8 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) $L_1 = \{a^i b^j \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon i \neq k \cdot j\}$

b) $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i > 0\}$

Aufgabe 13 **(Lösungsvorschlag)** *Pumping Lemma*

a) Sei L_1 regulär und n die Konstante aus dem Pumping Lemma. Betrachte für dieses n das Wort $z = a^n b^{n+n!}$. Zunächst müssen wir $z \in L_1$ zeigen. Da $L_1 \neq \emptyset$ gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit $n \geq 1$. Für $k = 0$ gilt somit $n > k(n + n!)$. Aus $1! = 1$ folgt unmittelbar $n < n + 1 \leq n + n! \leq k(n + n!)$ für $k \geq 1$ und somit $n \neq k(n + n!)$. Somit gilt $z \in L$. Dann existiert nach dem Pumping Lemma eine Zerlegung von z in $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ $uv^iw \in L$ gilt. Wegen $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ folgt für jede zulässige Zerlegung von w in uvw, dass $uv = a^k$ für $k \leq n$. Daher muss auch für beliebiges $i \in \mathbb{N}$ das Wort $a^{n+(i-1)\cdot|v|}b^{n+n!}$ in L enthalten sein. Es soll i so gewählt werden, dass der Widerspruch

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 \colon n + (i-1)\,|v| = k(n + n!)$$

folgt. Wegen $|v| \leq n$ tritt $|v|$ als Faktor in $n!$ auf, d.h. $\frac{n!}{|v|} \in \mathbb{N}$. Wähle daher $\tilde{i} = \frac{n!}{|v|} + 1$ und $k = 1$, dann folgt

$$n + (\tilde{i} - 1)\,|v| = n + \frac{n!}{|v|}\,|v| = k(n + n!)$$

und somit $uv^{\tilde{i}}w \notin L_1$.

b) Sei L_2 regulär und n die Konstante aus dem Pumping Lemma. Nach dem Pumping Lemma läßt sich eine Zerlegung für ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in uvw mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$ finden, so dass $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L_2$ gilt. Hieraus soll ein Widerspruch abgeleitet werden, d.h. es soll gezeigt werden, dass für alle möglichen Zerlegungen von z entsprechend dem Pumping Lemma ein $\tilde{i}$ gefunden werden kann, so dass $uv^{\tilde{i}}w \notin L$ folgt. Sei $z = ab^nc^n \in L_2$. Dann folgt aus $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$, dass $v = a^qb^r$ sein muss mit $q \in \{0, 1\}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n - q - 1\}$. Gilt $q = 1$ und $r = 0$, so folgt $u = \varepsilon \wedge v = a$ und damit $uv^0w = b^nc^n \notin L_2$. Somit kann diese Zerlegung das Pumping Lemma nicht erfüllen. Sei nun $q = 1$ und $r > 0$. Dann folgt $u = \varepsilon \wedge v = ab^r$ und die Worte uv^iw für $i > 1$ verletzen die geforderte Form $a^ib^jc^j$, z.B. $uv^2w = ab^rab^nc^n \notin L_2$. Diese Zerlegung kann also ebenfalls ausgeschlossen werden. Sei nun $q = 0$ und $v = b^r$ mit $r > 0$. Dann liegt bereits $uv^2w = ab^{n+r}c^n$ nicht mehr in L_2, da wegen $r > 0$ auch $n + r \neq n$ gilt. Somit existiert keine Zerlegung von z, welche das Pumping Lemma erfüllt.

Aufgabe 14 *Reguläre Ausdrücke, Determinisierung, Minimierung* (2+2+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $01(11 + 00)^*1$.

a) Konstruieren Sie für den gegebenen regulären Ausdruck einen entsprechenden NFA.

b) Wandeln Sie den NFA aus Teilaufgabe a) in einen DFA um.

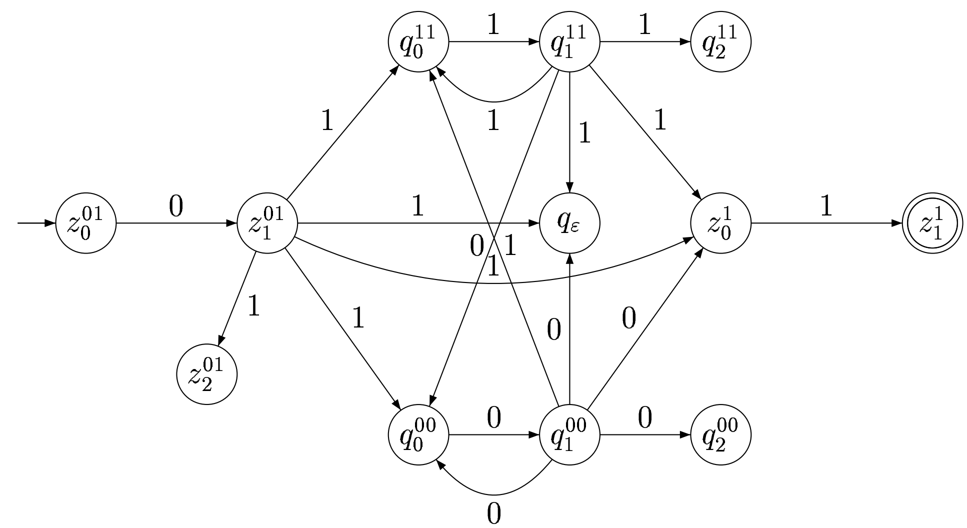
c) Minimieren Sie den DFA aus Teilaufgabe b).

Halten Sie sich bei allen Teilaufgaben möglichst genau an die in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und geben Sie jeden Teilschritt an.

Aufgabe 14 **(Lösungsvorschlag)** *Endliche Automaten*

a) Der resultierende NFA sollte wie folgt aussehen:

Abbildung 1: REG2NFA



b) Potenzmengenkonstruktion:

(a) $\{z_0^{01}\} \xrightarrow{1} \{z_1^{01}\} \wedge \{z_0^{01}\} \xrightarrow{0} \emptyset$

(b) $\{z_1^{01}\} \xrightarrow{1} \{q_0^{11}, q_0^{00}, q_\varepsilon, z_2^{01}, z_0^1\} \wedge \{z_1^{01}\} \xrightarrow{0} \emptyset$

(c) $\{q_0^{11}, q_0^{00}, q_\varepsilon, z_2^{01}, z_0^1\} \xrightarrow{1} \{q_1^{11}, z_1^1\} \wedge \{q_0^{11}, q_0^{00}, q_\varepsilon, z_2^{01}, z_0^1\} \xrightarrow{0} \{q_1^{00}\}$

(d) $\{q_1^{11}, z_1^1\} \xrightarrow{1} \{q_0^{11}, q_2^{11}, q_\varepsilon, q_0^{00}, z_0^1\} \wedge \{q_1^{11}, z_1^1\} \xrightarrow{0} \emptyset$

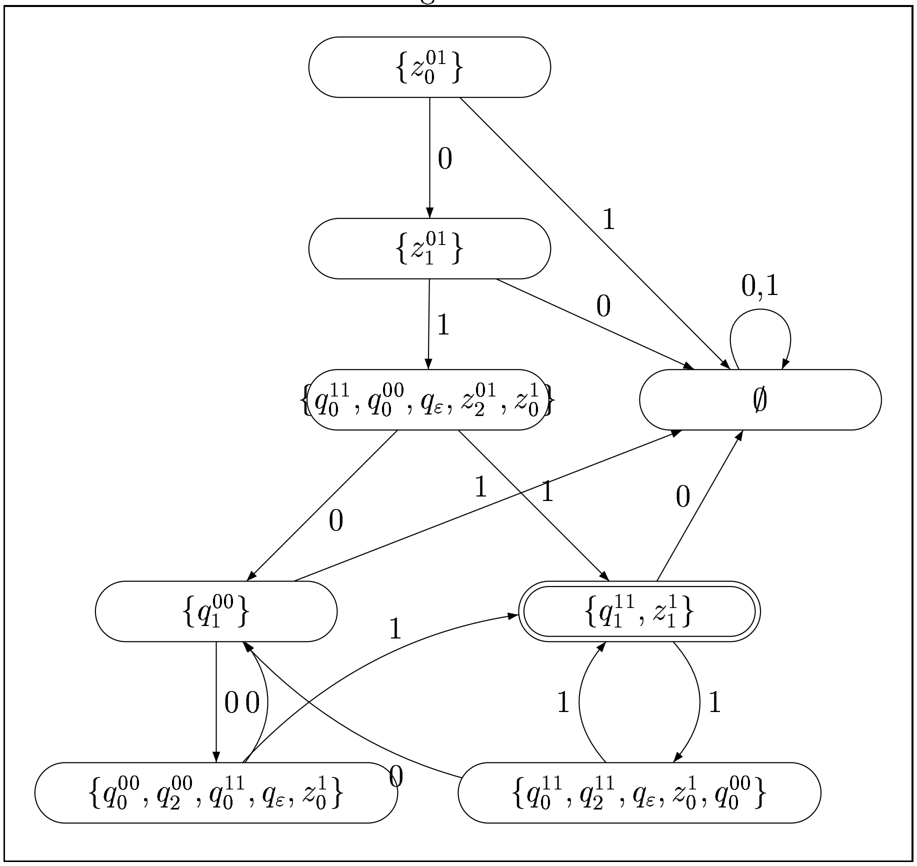
(e) $\{q_1^{00}\} \xrightarrow{0} \{q_0^{00}, q_2^{00}, q_\varepsilon, q_0^{11}, z_0^1\} \wedge \{q_1^{00}\} \xrightarrow{1} \emptyset$

(f) $\{q_0^{11}, q_2^{11}, q_\varepsilon, q_0^{00}, z_0^1\} \xrightarrow{1} \{z_1^1, q_1^{11}\} \wedge \{q_0^{11}, q_2^{11}, q_\varepsilon, q_0^{00}, z_0^1\} \xrightarrow{0} \{q_1^{00}\}$

(g) $\{q_0^{00}, q_2^{00}, q_\varepsilon, q_0^{11}, z_0^1\} \xrightarrow{0} \{q_1^{00}\} \wedge \{q_0^{00}, q_2^{00}, q_\varepsilon, q_0^{11}, z_0^1\} \xrightarrow{1} \{q_1^{11}, z_1^1\}$

Damit erhält man den in Abbildung 2 dargestellten DFA.

Abbildung 2: NFA2DFA

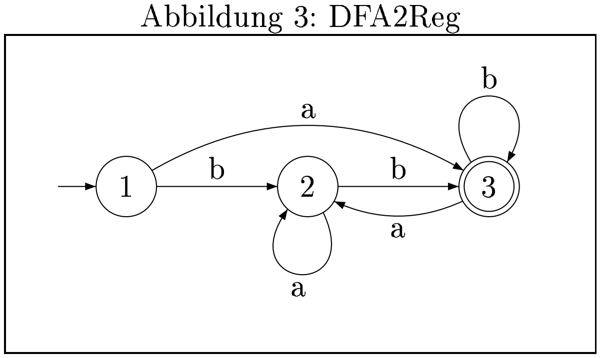


c) Der Minimierungsalgorithmus ergibt, dass die Zustände $\{q_0^{11}, q_0^{00}, q_\varepsilon, z_2^{01}, z_0^{1}\}$, $\{q_0^{00}, q_2^{00}, q_0^{11}, q_\varepsilon, z_0^{1}\}$ und $\{q_0^{11}, q_2^{11}, q_\varepsilon, z_0^{1}, q_0^{00}\}$ zu einem Zustand zusammengefaßt werden können.

Aufgabe 15 *Herleitung eines Regulären Ausdrucks aus einem DFA* (6 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem im Schöning auf den Seiten 38 und 39 beschriebenen Verfahren zu folgendem Automaten den entsprechenden regulären Ausdruck:

Abbildung 3: DFA2Reg



Verwenden Sie die vorgegebene Nummerierung der Zustände. Rechnen Sie anstatt mit den Mengen $R_{i,j}^k$ mit den entsprechenden regulären Ausdrücken $\alpha_{i,j}^k$, und vereinfachen

Sie diese nach jedem Rechenschritt (vgl. auch Aufgabe 16). Schreiben Sie für festes k die regulären Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ als Matrix $\alpha^{(k)} = (\alpha_{i,j}^k)$. Hiermit gilt:

$$\underbrace{\alpha^{(k+1)}}_{n\times n \text{ Matrix}} = \underbrace{\alpha^{(k)}}_{n\times n \text{ Matrix}} + \underbrace{(\alpha_{i,k+1}^k)_{i\in\{1,\dots,n\}}}_{n \text{ Spaltenvektor}} (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \underbrace{(\alpha_{k+1,j}^k)_{j\in\{1,\dots,n\}}}_{n \text{ Zeilenvektor}}$$

unter Verwendung der üblichen komponentenweisen Verknüpfung von Matrizen/Vektoren. Berechnen Sie zunächst die $n \times n$ Matrix

$$\underbrace{(\alpha_{i,k+1}^k)_i}_{n \text{ Spaltenvektor}} \; (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \; \underbrace{(\alpha_{k+1,j}^k)_j}_{n \text{ Zeilenvektor}}$$

in jedem Schritt, und addieren Sie diese zu der bereits berechneten Matrix $\alpha^{(k)}$.
Hinweis: Anstatt $a|b$ verwenden wir die Schreibweise $a + b$.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} (\varepsilon)^* \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,b & \varepsilon\,(\varepsilon)^*\,a \\ \emptyset\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,b & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,a \\ \emptyset\,(\varepsilon)^*\,\varepsilon & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,b & \emptyset\,(\varepsilon)^*\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15 **(Lösungsvorschlag)** *Herleitung eines Regulären Ausdrucks aus einem DFA*

$$\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{i,1}^0)_i(\alpha_{1,1}^0)^*(\alpha_{1,j}^0)_j = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} (\varepsilon)^* \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{i,2}^1)_i(\alpha_{2,2}^1)^*(\alpha_{2,j}^1)_j = \begin{pmatrix} b \\ a+\varepsilon \\ a \end{pmatrix} \underbrace{(a+\varepsilon)^*}_{=a^*} \begin{pmatrix} \emptyset & a+\varepsilon & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & ba^* & ba^*b \\ \emptyset & a^* & a^*b \\ \emptyset & a^+ & a^+b \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & b & a \\ \emptyset & a+\varepsilon & b \\ \emptyset & a & b+\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset & ba^* & ba^*b \\ \emptyset & a^* & a^*b \\ \emptyset & a^+ & a^+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ba^* & a+ba^*b \\ \emptyset & a^* & a^*b \\ \emptyset & a^+ & a^*b+\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{i,3}^2)_i(\alpha_{3,3}^2)^*(\alpha_{3,j}^2)_j = \begin{pmatrix} a+ba^*b \\ a^*b \\ a^*b+\varepsilon \end{pmatrix} (a^*b+\varepsilon)^* \begin{pmatrix} \emptyset & a^+ & a^*b+\varepsilon \end{pmatrix} = \dots$$

Da 3 der einzige Endzustand ist, brauchen wir nur $\alpha_{1,3}^3$ zu berechnen:
$\alpha_{1,3}^3 = \alpha_{1,3}^2 + \alpha_{1,3}^2(\alpha_{3,3}^2)^*\alpha_{3,3}^2 = (a+ba^*b) + (a+ba^*b)\,(a^*b+\varepsilon)^*\,(a^*b+\varepsilon) = (a+ba^*b) + (a+ba^*b)\,(a^*b)^* = (a+ba^*b)\,(a^*b)^*$

Aufgabe 16 **(Zusatzaufgabe)** *Reguläre Ausdrücke und Kleene Algebren* (4+4 = 8 Punkte)

Eine *Kleene Algebra* ist eine algebraische Struktur $\mathcal{K} = (K, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$	(2) $a+b = b+a$	(3) $a+0 = a$	(4) $a+a = a$
(5) $(ab)c = a(bc)$	(6) $1a = a$	(7) $a1 = a$	
(8) $a(b+c) = ab+ac$	(9) $(a+b)c = ac+bc$	(10) $0a = 0$	(11) $a0 = 0$
(12) $1 + aa^\star \leq a^\star$	(13) $1 + a^\star a \leq a^\star$		
(14) $b + ax \leq x \Rightarrow a^\star b \leq x$	(15) $b + xa \leq x \Rightarrow ba^\star \leq x$		

wobei $\forall a, b \in K\colon a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ gilt. Hiermit folgt wegen (2) wie gewohnt $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b + a = b$.

(a) Zeigen Sie für allgemeine Kleene-Algebren, dass $d^\star$ der kleinste Präfixpunkt der Abbildungen $l\colon K \to K : x \mapsto 1 + dx$ und $r\colon K \to K : x \mapsto 1 + xd$ ist, d.h. es gilt $\forall c \in K\colon l(c) \leq c \Rightarrow d^\star \leq c$ und $\forall c \in K\colon r(c) \leq c \Rightarrow d^\star \leq c$. Verwenden Sie hierfür die Axiome (12) und (14) bzw. (13) und (15). Zeigen Sie außerdem, dass $dd^\star \leq d^\star$ und $d^\star d \leq d^\star$ gilt. Beachten Sie hierfür die Definition von $\leq$ und die Bedingungen (12) bzw. (13). Zeigen Sie schließlich mit den Eigenschaften (12) und (14) von *, dass $(d+1)^\star \leq d^\star$ und $d^\star \leq (d+1)^\star$ gilt.

(b) Mit Reg_Σ seien die regulären Ausdrücke über einem festen Alphabet Σ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}_\Sigma = (\mathrm{Reg}_\Sigma, |, \circ, ^*, \emptyset, \varepsilon)$ eine Kleene Algebra ist, wobei $\circ$ für die Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke steht. Was bedeutet $a \leq b$ für zwei reguläre Ausdrücke in diesem Fall? Zeigen Sie, dass in $\mathcal{R}_\Sigma$ in den Axiomen (12) und (13) sogar die Gleichheit gilt.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen * und *. Für * sind nur die oben geforderten Eigenschaften bekannt.

Aufgabe 16 **(Lösungsvorschlag)** *Reguläre Ausdrücke und Kleene Algebren*

(a)
1) Aufgrund der Symmetrie reicht es, l zu betrachten. Sei c ein Präfixpunkt, es gelte also $l(c) \leq c$. Aus (12) folgt $l(d^\star) = 1 + dd^\star \leq d^\star$, d.h. $d^\star$ ist ebenfalls ein Präfixpunkt. Mit $a := d \wedge b := 1 \wedge x := c$ folgt aus (14) $d^\star 1 \overset{(7)}{=} d^\star \leq c$, da c ein Präfixpunkt von l ist, und die Prämisse somit erfüllt ist.
2) Da $dd^\star \leq dd^\star + 1$ nach Definition von $\leq$ gilt, folgt mit $a := d$ aus (12) $dd^\star \leq 1 + dd^\star \leq d^\star$. Entsprechend für $d^\star d$ mit (13).
3) Betrachte $(d+1)^\star \leq d^\star$.

$$1 + (d+1)d^\star = 1 + dd^\star + d^\star \underbrace{\overset{(12)}{\leq}}_{a:=d} d^\star + d^\star \overset{(4)}{=} d^\star$$

Daher gilt auch

$$\underbrace{\overset{(14)}{\Rightarrow}}_{a:=(d+1), x:=d^\star, b:=1} \quad (d+1)^\star 1 \overset{(7)}{=} (d+1)^\star \leq d^\star$$

4) Für $d^\star \leq (d+1)^\star$ folgt zunächst wegen

$$1 + d(d+1)^\star \leq 1 + (d+1)^\star + d(d+1)^\star = 1 + (d+1)(d+1)^\star \underbrace{\overset{(12)}{\leq}}_{a:=(d+1)} (d+1)^\star$$

und damit

$$\underbrace{\overset{(14)}{\Rightarrow}}_{a:=d, x:=(d+1)^\star, b:=1} \quad d^\star 1 \overset{(7)}{=} d^\star \leq (d+1)^\star$$

(b) 1) Da $a + b := a \mid b = L(a) \cup L(b)$, gilt $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b \Leftrightarrow L(a) \cup L(b) = L(b) \Leftrightarrow L(a) \subseteq L(b)$.

2) (1) bis (4) ergeben sich aus den Eigenschaften von $\cup$. Diese Eigenschaften besagen gerade, dass $(\mathrm{Reg}_\Sigma, |, \emptyset)$ ein kommutatives Monoid ist.

3) (5) bis (7) sind ebenfalls trivial, für einen formal korrekten Beweis sollte wohl $L((ab)c) \subseteq L(a(bc))$ gezeigt werden. Die Rückrichtung ist dann symmetrisch. (5)-(7) besagen dann gerade, dass $(\mathrm{Reg}_\Sigma, \circ, \varepsilon)$ ein Monoid ist.

4) (8) bis (11) beschreiben die Links- und Rechtsdistributivität und Annihilator-Eigenschaft von $\emptyset$ bezüglich $\circ$. Dies macht $(\mathrm{Reg}_\Sigma, |, \circ, \emptyset, \varepsilon)$ zu einem Semiring. Für einen Ring müßte $(\mathrm{Reg}_\Sigma, |, \emptyset)$ eine kommutative Gruppe sein, d.h. auch additive Inverse existieren. Da dies jedoch nicht erfüllt ist, müssen extra die Bedingungen (10) und (11) gefordert werden. Im Fall einer Gruppe folgen diese bereits aus den Distributivgesetzen, z.B. $0a = (b-b)a = ba - ba = 0$.

5) Die Bedingungen (12) bis (15) beschreiben dann die Eigenschaften des Kleene-Stern-Operators. Insbesondere besagen (12) und (13), dass a^* als kleinster Fixpunkt der Fixpunktabbildungen $f\colon \mathrm{Reg}_\Sigma \to \mathrm{Reg}_\Sigma : x \mapsto 1 \mid ax$ und $g\colon \mathrm{Reg}_\Sigma \to \mathrm{Reg}_\Sigma : x \mapsto 1 \mid xa$ charakerisiert ist. Die Eigenschaften (12) bis (15) werden daher auch am besten induktiv gezeigt.

6) Im Fall (14) und (15) muß z.B. induktiv gezeigt werden, dass aus $b \mid ax \leq x$ $\forall n \geq 0 : a^n b \leq x$ bzw. aus $b \mid xa \leq x$ $\forall n \geq 0 : ba^n \leq x$ folgt.

   a) Es gelte $L(b) \cup L(a)L(x) \subseteq L(x)$. Zu zeigen: $\forall n \geq 0 : L(a)^n L(b) \subseteq L(x)$

      A. $n = 0 : L(b) \subseteq L(x)$ wegen Annahme erfüllt

      B. $n \to n+1 : L(a)^{n+1} L(b) = L(a) \underbrace{L(a)^n L(b)}_{\subseteq L(x) \text{ nach Induktion}} \subseteq L(a)L(x) \subseteq L(x)$

   b) Es gelte $L(b) \cup L(x)L(a) \subseteq L(x)$. Zu zeigen: $\forall n \geq 0 : L(b)L(a)^n \subseteq L(x)$. (Analog zu a))

7) Es soll gezeigt werden, dass im Fall von (12) (und (13) analog) die Gleichheit gilt:
$\varepsilon \mid aa^* = \{\varepsilon\} \cup L(a) \circ \bigcup_{n\geq 0} L(a)^n = L(a)^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} L(a)^n = \bigcup_{n\geq 0} L(a)^n = a^*$