Universität Stuttgart
Formale Methoden der Informatik
Prof. J. Esparza/ M. Luttenberger

Sommersemester
Übungsblatt 4

Übungen zu Model Checking

Besprechung am 16.06.05

Aufgabe 4.1 LTL vs CTL

Geben Sie jeweils an, welche der untenstehenden Aussagen unerfüllbar, erfüllbar bzw. allgemeingültig sind.

LTL	**CTL**
$(\mathcal{K} \models \phi) \wedge (\mathcal{K} \models \neg\phi)$	$(\mathcal{K} \models \phi) \wedge (\mathcal{K} \models \neg\phi)$
$(\mathcal{K} \models \phi) \wedge (\mathcal{K} \not\models \neg\phi)$	$(\mathcal{K} \models \phi) \wedge (\mathcal{K} \not\models \neg\phi)$
$(\mathcal{K} \not\models \phi) \wedge (\mathcal{K} \not\models \neg\phi)$	$(\mathcal{K} \not\models \phi) \wedge (\mathcal{K} \not\models \neg\phi)$

Was gilt für die obigen Aussagen im Fall von **CTL***?

Aufgabe 4.2

Gegeben sei folgendes paralleles Programm:

while(**true**) {
    x = x + 1;
    x = x − 1;
}
	while(**true**) {
	    y = y + 1;
	    y = y − 1;
	}

wobei im Startzustand $x = 0$ und $y = 0$ gelte. Weiterhin sei die **LTL**-Formel $\phi = (x = 1)\,\mathbf{R}\,\mathbf{X}(y = 0)$ gegeben. Sie

(a) Zeichnen Sie die Kripkestruktur $\mathcal{K}$ für obiges Programm. $\mathcal{K}$ sollte aus 4 Zuständen bestehen.

(b) Geben Sie nun einen Büchiautomaten $\mathcal{B}_{\neg\phi}$ zu $\neg\phi$ an. Es ist nicht verlangt, die Konstruktion aus der Vorlesung zu verwenden.

(c) Bilden Sie das *vollständige* Kreuzprodukt $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{B}_{\neg\phi}$, d.h. nicht nur den vom Startzustand erreichbaren Teilgraphen.

(d) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{K} \models \phi$ gilt, indem Sie die verschachtelte Tiefensuche auf $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{B}_{\neg\phi}$ ausführen. Geben Sie ggf. das gefundene Gegenbeispiel an.

(e) Die letzte Teilaufgabe hat das lokale Modelchecking für die **LTL**-Formel ϕ betrachtet. D.h. man ist nur daran interessiert gewesen, ob ϕ im Startzustand von $\mathcal{K}$ gilt.

Überlegen Sie sich anhand von $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{B}_{\neg\phi}$ einen *globalen* **LTL**-Modelcheckingalgorithmus. D.h. der Algorithmus soll *alle* Zustände einer Kripkestruktur bestimmen, welche die gegebene **LTL**-Formel (nicht) erfüllen. Welche Komplexität hat dieser Algorithmus?

Führen Sie Ihren Algorithmus auf $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{B}_{\neg\phi}$ aus.

(f) Betrachten Sie die **CTL***-Formel $\psi = \mathbf{AF}\,\mathbf{A}\,\phi$. Welche Zustände in $\mathcal{K}$ erfüllen ψ?

(g) Konstruieren Sie mit Hilfe des globalen **LTL**-Modelcheckingalgorithmus einen Modelcheckingalgorithmus für **CTL***.

(h) Versuchen Sie die Formeln $(x = 0)\,\mathbf{U}\,\mathbf{X}(y = 1)$ und $(x = 0)\,\mathbf{U}(y = 1)$ im μ-Kalkül auszudrücken.

Aufgabe 4.3

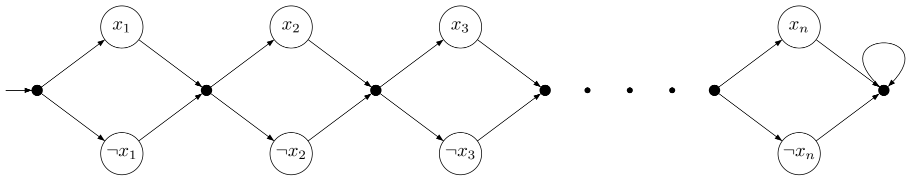
Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Modelchecking für **LTL** **PSPACE**-vollständig ist. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass dieses Problem bereits **NP**-schwer ist[1], falls man nur das Fragment $\mathbf{LTL_F}$ von **LTL** betrachtet, in welchem einzig der Temporaloperator **F** (und die Negation $\neg\,\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$) erlaubt ist. D.h. $a \in \mathbf{AP}$ ist eine $\mathbf{LTL_F}$-Formel, und sind ϕ_1, ϕ_2 $\mathbf{LTL_F}$-Formeln, so auch

$$\phi_1 \vee \phi_2, \neg\phi_1, F\phi_1.$$

Ansonsten enthält $\mathbf{LTL_F}$ keine weiteren Formeln.

Reduzieren Sie 3-KNF-SAT auf das Entscheidungsproblem $\mathcal{K} \models \phi$, wobei $\mathcal{K}$ und $\phi \in \mathbf{LTL_F}$ die Eingabeparameter sind. Konstruieren Sie hierfür zu gegebener 3-KNF-Formel $\psi = \bigwedge_{i=1}^{k} K_i$ mit Klauseln K_i eine Kripkestruktur $\mathcal{K}$ der Form

[1] Erinnerung: D.h., jedes Problem aus **NP** lässt sich in Polynomialzeit darauf reduzieren



und eine $\mathbf{LTL_F}$-Formel ϕ, so dass $\mathcal{K} \models \phi$ genau dann gilt, wenn ψ erfüllbar ist. Hierbei seien $x_1, \ldots, x_n$ genau die Variablen, welche in ψ auftreten. Wählen Sie $\mathbf{AP} = \{K_1, \ldots, K_k\}$.