Übungen zu Theoretische Informatik III

Abgabe bis zum 14.06.05

Aufgabe 5.1 — 8 Punkte

Auf dem letzten Übungsblatt wurde das Problem 2-KNF-SAT vorgestellt und es wurde behauptet, dass sich dieses Problem in Polynomialzeit lösen lässt. Ziel dieser Aufgabe ist es, dies zu zeigen.

Zu gegebener 2-KNF-Formel ϕ sei $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ der folgende gerichtete Graph:

- Die Kontenmenge V_ϕ besteht aus allen Variablen, welche in ϕ auftreten, und deren Negationen, d.h. die Knoten sind genau die möglichen Literale:

$$V_\phi = \{x, \neg x \mid x \text{ ist Variable aus } \phi\}$$

- Für jede zweielementige Klausel $\alpha \vee \beta$ aus ϕ über den Literalen α, β besitzt G_ϕ die Kanten $(\neg\alpha, \beta)$ und $(\neg\beta, \alpha)$. Ansonsten besitzt G_ϕ keine weiteren Kanten. Im Fall $\alpha = \neg x$ sei dabei $\neg\alpha$ der Knoten (zu) x.

  Eine jede Kante drückt also eine Implikation zwischen verschiedenen Literalen von ϕ aus.

(a) Zeigen Sie, existiert ein Pfad von α nach β in G_ϕ, so existiert auch ein Pfad von $\neg\beta$ nach $\neg\alpha$.

(b) Es existiere ein Pfad von α nach β in G_ϕ. Weiterhin sei $\mathcal{B}$ eine erfüllende Belegung für ϕ mit $\mathcal{B}(\alpha) = 1$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{B}(\beta) = 1$ gelten muss.

(c) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann unerfüllbar ist, falls es in G_ϕ einen Pfad von einer Variable x nach $\neg x$ (und damit von $\neg x$ nach x) gibt.

  i) Nehmen Sie zunächst an, dass ein solcher Pfad existiert, aber ϕ dennoch durch eine Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist. Betrachten Sie dann einen Pfad von x nach $\neg x$ und leiten Sie hiermit einen Widerspruch her.

  ii) Für den Fall, dass für keine Variable x ein Pfad von x nach $\neg x$ existiert, ist Ihnen folgender Algorithmus gegeben, von welchem behauptet wird, dass dieser eine erfüllende Belegung für ϕ berechnet:

  - Zu Beginn ist $\mathcal{B}$ für alle Literale von ϕ undefiniert.
  - Solange es noch Literale gibt, für welche $\mathcal{B}$ undefiniert ist, wähle ein solches Literal α:
    – Sei αE_ϕ^* die Menge der von α in G_ϕ erreichbaren Knoten / Literale, insbesondere $\alpha \in \alpha E_\phi^*$:

      Für $\beta \in \alpha E_\phi^*$ setze $\mathcal{B}(\beta) = 1$.

    – Sei $E_\phi^* \neg\alpha$ die Menge von Knoten / Literalen, welche $\neg\alpha$ in G_ϕ erreichen können:

      Für $\beta \in E_\phi^* \neg\alpha$ setze $\mathcal{B}(\beta) = 0$.

  Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen wohldefiniert ist. D.h. zeigen Sie, dass *jedes* Literal (Knoten) von diesem Algorithmus einen *eindeutigen* widerspruchsfreien ($\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(\neg x)$) Wahrheitswert zugewiesen bekommt. Zeigen Sie weiterhin, dass die so konstruierte Belegung ein Modell für ϕ ist.

(d) Zeigen Sie nun, dass 2-KNF-SAT in Polynomialzeit entscheidbar ist.

Aufgabe 5.2 — 4 Punkte

Zeigen bzw. widerlegen Sie mit Hilfe bekannter Sätze, dass

(a) $\textbf{DTime}(2n^2) = \textbf{DTime}(100n^2)$

(b) $\textbf{DSpace}(n^2) \subsetneq \textbf{DSpace}(n^2 \log(n))$

(c) $\textbf{DTime}(n^2) \subsetneq \textbf{DTime}(n^2 \log^2(n))$

(d) $\textbf{NSpace}(n^2) \subsetneq \textbf{DSpace}(n^5)$

(e) $\textbf{P} \subsetneq \textbf{DTime}(2^n)$

Hinweis: Alle hier verwendeten Funktionen sind platz- und zeitkonstruierbar.

Aufgabe 5.3 — 4 Punkte

Zeigen Sie $\textbf{NP} \neq \textbf{DSpace}(n)$ unter Verwendung der Translationssätze.