

Übung zu “Automatische Analyse und Verifikation von Programmen”

Dieses Übungsblatt wird am Montag, den 10. Juni, von 15:45–17:15 Uhr im Raum 0.124 besprochen.

Aufgabe 16 Abstrakte Semantik von WHILE-Programmen

Betrachten Sie folgendes WHILE-Programm S :

```
if [x*x+x≥0]1
  then while [x≤0]2 do
    [x:=x+1]3
  od
  else [x:=-1]4
fi
```

Wir betrachten die Abstraktion, die durch Liften der Extraktionsfunktion $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \{-, 0, +\}$ erzeugt wurde (Definition siehe Skript).

- Bestimmen Sie die Übergänge der genauesten abstrakten Semantik, beginnend vom Anfangszustand $\langle S, \{[x \mapsto -], [x \mapsto 0], [x \mapsto +]\} \rangle$.
- Was ändert sich, wenn man die abstrakte Semantik - wie in der Vorlesung vorgestellt - automatisch ableitet?

Aufgabe 17 *Inklusionstest*

Für zwei Polyeder P, Q prüft man $P \subseteq Q$ am besten dadurch, dass P durch Mengen von Punkten V und Strahlen R dargestellt wird. Das Polyeder Q sollte durch ein Ungleichungssystem der Form $A\vec{x} \geq \vec{b}$ beschrieben werden.

Zeigen Sie, dass $P \subseteq Q$ genau dann gilt, wenn entweder P leer ist oder $A\vec{v} \geq \vec{b}$ für jedes $\vec{v} \in V$ und $A\vec{r} \geq 0$ für jedes $\vec{r} \in R$.

Aufgabe 18 *Polyederdarstellungen*

- (a) Betrachten Sie folgende zwei Polyeder P_1, P_2 , die durch Ungleichungssysteme beschrieben werden und bestimmen Sie die dazugehörige Darstellungen durch Punkte und Strahlen. Versuchen Sie, wenn möglich, die Umwandlung sowohl graphisch als auch rechnerisch durchzuführen.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- (b) Betrachten Sie folgendes Polyeder Q , das durch eine Punktmenge V gegeben ist. Die Menge R der Strahlen sei leer. Bestimmen Sie die dazugehörige Ungleichungsdarstellung, wieder sowohl graphisch als auch rechnerisch.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Hinweis: Auf einem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ im zweidimensionalen Raum stehen unter anderem die Vektoren $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ senkrecht.

Aufgabe 19 *Eine neue Zugsteuerung*

Führen Sie eine Polyeder-Analyse für folgende neue Zugsteuerung durch. Wir nehmen wieder an, dass die Geschwindigkeit s des Zuges zu Anfang zwischen 48 und 52 liegt. Führen Sie die ersten Schritte der Fixpunktiteration durch und bestimmen Sie die zu den Ein- und Ausgängen der Blöcke gehörenden Polyeder. Schließen Sie aus diesen ersten Schritten auf den Fixpunkt.

```
[d:=0]1;  
while [true]2 do  
  [d:=d+s-50]3;  
  [s:=s-0.5*(s-50)]4  
od
```