

A1.1

(a) Zu zeigen:

$$w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi') \text{ genau dann, wenn } w \models \neg\phi \mathbf{R} \neg\phi'.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi') & \stackrel{\text{nach Def.}}{\Leftrightarrow} \neg\exists i : (w^i \models \phi' \wedge \forall j < i : w^j \models \phi) \\ & \Leftrightarrow \forall i : w^i \models \neg\phi' \vee \neg\forall j < i : w^j \models \phi \\ & \Leftrightarrow \forall i : (\forall j < i : w^j \models \neg\phi) \rightarrow w^i \models \neg\phi' \\ & \stackrel{\text{nach Def.}}{\Leftrightarrow} w \models \neg\phi \mathbf{R} \neg\phi'. \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen:

$$w \models \mathbf{G} \phi \text{ genau dann, wenn } \forall i \in \mathbb{N} : w^i \models \phi.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} w \models \mathbf{G} \phi & \stackrel{\text{nach Def.}}{\Leftrightarrow} w \models \neg(\mathbf{true} \mathbf{U} \neg\phi) \\ & \Leftrightarrow \exists i : w^i \models \neg\phi \wedge \forall j < i : w^j \models \mathbf{true} \\ & \Leftrightarrow \exists i : w^i \not\models \phi \\ & \Leftrightarrow \forall i : w^i \models \phi \end{aligned}$$

(c) Zu zeigen:

$$w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi') \text{ genau dann, wenn } w \models (\mathbf{G} \neg\phi') \vee (\neg\phi' \mathbf{U} (\neg\phi \wedge \neg\phi'))$$

Beweis:

\Leftarrow : Es sei w ein Modell von $\mathbf{G} \neg\phi' \vee (\neg\phi' \mathbf{U} (\neg\phi \wedge \neg\phi'))$. Gilt bereits $w \models \mathbf{G} \neg\phi'$, so auch $w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi')$.

Erfüllt w hingegen nur $(\neg\phi' \mathbf{U} (\neg\phi \wedge \neg\phi'))$, so existiert ein *kleinstes* i mit $w^i \models \neg\phi \wedge \neg\phi'$ und für alle $j < i$ gilt $w^j \models \neg\phi'$.

Man nehme nun dennoch an, dass $w \models \phi \mathbf{U} \phi'$ gilt. Dann existiert also ein k mit $w^k \models \phi'$. Da für alle $n \leq i$ nach obigem jedoch $w^n \models \neg\phi'$ gilt, folgt $k > i$. Wegen $w^i \models \neg\phi$ kann dann aber w kein Modell von $\phi \mathbf{U} \phi'$ sein, da die Bedingung $\forall j < k : w^k \models \phi$ eben bei $i < k$ verletzt ist.

\Rightarrow :

$$\begin{aligned} w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi') & \Leftrightarrow \neg\exists i : w^i \models \phi' \wedge \forall j < i : w^j \models \phi \\ & \Leftrightarrow \forall i : w^i \models \neg\phi' \vee \exists j < i : w^j \models \neg\phi \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1.Fall: Es gilt bereits $\forall i : w^i \models \neg\phi'$, d.h. $w \models \mathbf{G} \neg\phi'$.

2.Fall: Es gilt nicht $\forall i : w^i \models \neg\phi'$. Damit existiert ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $w^n \models \phi'$. Wegen der Minimalität von n folgt, dass für alle $k < n$ $w^k \models \neg\phi'$ gilt.

Da w ein Modell von $\forall i : w^i \models \neg\phi' \vee \exists j < i : w^j \models \neg\phi$ ist, muss also ein $m < n$ existieren, welches $w^m \models \neg\phi$ erfüllt.

Wegen $m < n$ folgt also $w^m \models \neg\phi \wedge \neg\phi'$, insgesamt folgt also $w \models \neg(\phi \mathbf{U} \phi')$.

A1.2

(a) Wir konstruieren rekursiv mittels Induktion über den Formelaufbau zu einer **LTL**-Formel ϕ eine **NF-LTL**-Formel ψ :

$\phi = a \in \mathbf{AP}$: Setze $\psi := \phi$.

$\phi = \phi_1 \bigwedge \bigvee \phi_2$: Rekursiv finden wir **NF-LTL**-Formeln ψ_i mit $\phi_i \equiv \psi_i$. Setze $\psi := \psi_1 \bigwedge \bigvee \psi_2$. ψ ist damit auch in positiver Normalform.

$\phi = \mathbf{X} \phi_1$: Wir finden wieder rekursiv ψ_1 mit $\psi_1 \equiv \phi_1$. Dann ist $\psi := \mathbf{X} \psi_1 \equiv \phi$ und in positiver Normalform.

$\phi = \phi_1 \mathbf{U} \phi_2$: Ganz entsprechend konstruieren wir rekursive ψ_i in positiver Normalform mit $\psi_i \equiv \phi_i$. Dann ist auch $\psi := \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ in positiver Normalform.

$\phi = \neg\phi_0$: Gilt

$\phi_0 = a \in \mathbf{AP}$: so setze $\psi := \phi$.

$\phi_0 = \phi_1 \wedge \phi_2$: so folgt $\phi = \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$. $\neg\phi_i$ sind Formeln, welche in weniger Schritten als ϕ abgeleitet werden können (Terminierung!). Induktiv/Rekursiv können wir daher Formeln ψ_i in positiver Normalform mit $\psi_i \equiv \neg\phi_i$ konstruieren. Setze dann $\psi := \psi_1 \vee \psi_2$.

$\phi_0 = \phi_1 \vee \phi_2$: entsprechend setze man $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ mit ψ_i wie im vorherigen Fall von \wedge .

$\phi_0 = \mathbf{X}\phi_1$: so setze $\psi = \mathbf{X}\psi_1$ mit $\psi_1 \equiv \neg\phi_1$ in positiver NF.

$\phi_0 = \phi_1 \mathbf{U}\phi_2$: Nach A1.1 gilt dann $\phi = \mathbf{G}\neg\phi_2 \vee \neg\phi_2 \mathbf{U}\neg(\phi_1 \vee \phi_2)$, so dass man wieder $\psi := \mathbf{G}\psi_2 \vee \psi_2 \mathbf{U}(\psi_1 \vee \psi_2)$ setzen kann, wobei wiederum ψ_i rekursiv konstruierte NF-Formeln mit $\psi_i \equiv \neg\phi_i$ sind.

(b) Wir konstruieren für ein Wort $w \in \Sigma^\omega$ und eine NF-**LTL**_{-G}-Formel ϕ eine Konstante $N(w, \phi)$ mit

$$w \models \phi \Rightarrow w_0 \dots w_{N(w, \phi)} \Sigma^\omega \models \phi.$$

Es sei also ϕ eine NF-**LTL**_{-G}-Formel und w ein Wort mit $w \models \phi$, beide beliebig, aber fest.

Gilt $\phi = a$ oder $\phi = \neg a$, so kann $N(w, \phi) := 0$ gewählt werden. Für $\phi = \mathbf{X}\phi'$ ist dann für w^1 und ϕ' induktiv bereits die Konstante $N(w^1, \phi')$ bestimmt. Dann kann offensichtlich $N(w, \mathbf{X}\phi') := 1 + N(w^1, \phi')$ gesetzt werden.

Im Fall $\phi = \phi' \wedge \phi''$ bzw. $\phi = \phi' \vee \phi''$ kann entsprechend $N(w, \phi_1 \wedge \phi_2) := \max(N(w, \phi_1), N(w, \phi_2))$ bzw. $N(w, \phi_1 \vee \phi_2) := \min(N(w, \phi_1), N(w, \phi_2))$ gewählt werden.

Bleibt $\phi = \psi_1 \mathbf{U}\psi_2$. Da $w \models \phi$, existiert ein, ohne Einschränkung kleinstes $i \in \mathbb{N}$ mit $w^i \models \psi_2 \wedge \forall k < i : w^k \models \psi_1$. Wir finden also die Konstanten $N(w^k, \psi_1)$ für $k < i$ und $N(w^i, \psi_2)$. Für $i > 0$ können wir $N(w, \phi)$ dann als $\max\{0 + N(w^0, \psi_1), \dots, (i-1) + N(w^{i-1}, \psi_1), i + N(w^i, \psi_2)\}$ wählen für $i > 0$, und ansonsten (für $i = 0$) einfach als $N(w, \psi_2)$.

(c) Für $w \in \Sigma^\omega$ war $D(w)$ als das Wort $w_0 w_0 w_1 w_1 \dots$ definiert. Zu zeigen ist, dass für alle NF-**LTL**_{-G}-Formeln ϕ gilt: $w \models \phi \Leftrightarrow D(w) \models \phi$.

Wir zeigen eine stärkere Eigenschaft:

Für $a \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$ sei $[w]_a = \underbrace{w_0 \dots w_0}_{a_0} \underbrace{w_1 \dots w_1}_{a_1} \dots$ a_i gibt also gerade an, wie oft w_i wiederholt werden soll, wobei w_i nicht gelöscht werden darf ($a_i > 0$).

Dann gilt für jede NF-**LTL**_{-X}-Formel ϕ , jedes $w \in \Sigma^\omega$ und jede Folge $a \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$:

$$w \models \phi \Leftrightarrow [w]_a \models \phi.$$

Die Richtung \Leftarrow gilt offensichtlich immer wegen $[w]_{(1)} = w$.

Die geforderte Eigenschaft folgt ebenso sofort aus dieser stärkeren Aussage für $a = (2)$.

Für die Richtung „ \Rightarrow “ benutzen wir wieder Induktion über den Formelaufbau für eine NF-**LTL**_{-X}-Formel ϕ :

$\phi = a \in \mathbf{AP}$: Nach Definition von $w \models \phi$ ist nur w_0 entscheidend und nach Definition gilt $([w]_a)_0 = w_0$ für alle Folgen $a \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$.

$\phi = \psi_1 \bigwedge \psi_2$: Induktiv gilt $w' \models \psi_k \Leftrightarrow [w']_a \models \psi_k$ bereits für alle $a \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$, $w' \in \Sigma^\omega$. Damit folgt:

$$(w \models \psi_1 \wedge \psi_2) \stackrel{\text{n.Def.}}{\Leftrightarrow} (w \models \psi_1) \wedge (w \models \psi_2) \Leftrightarrow ([w]_a \models \psi_1) \wedge ([w]_a \models \psi_2) \stackrel{\text{n.Def.}}{\Leftrightarrow} ([w]_a \models \psi_1 \wedge \psi_2).$$

Und ganz analog für \vee .

$\phi = \mathbf{G}\psi$: Wieder gilt induktiv $w' \models \psi \Leftrightarrow [w']_{a'} \models \psi$ für alle $w' \in \Sigma^\omega$, $a' \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$.

Sei $a \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$ beliebig vorgegeben. Dann muss $([w]_a)^j \models \psi$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gezeigt werden.

Aus $w \models \mathbf{G}\psi$ folgt zunächst $w^i \models \psi$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und mittels Induktion daraus $[w^i]_{a'} \models \psi$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $a' \in \mathbb{N}_{-0}^\omega$.

Wenn wir also jeden Suffix $([w]_a)^j$ als $[w^i]_{a'}$ darstellen können durch geeignete Wahl von i und a' , dann sind wir schon fertig.

Wir setzen dafür zunächst $l(k) := \sum_{r=0}^k a_r$, wobei $l(-1) = 0$ gilt.

$l(k)$ gibt einfach die Länge des Worts $\underbrace{w_0 \dots w_0}_{a_0} \dots \underbrace{w_k \dots w_k}_{a_k}$ an.

Für festes j wählen wir dann einfach das (eindeutig bestimmte) i mit $l(i-1) \leq j < l(i)$. i ist also einfach der "Wiederholungsblock" von $[w]_a$, in welchen die Position j fällt.

Für diese Wahl von i bezüglich gegebenem j gilt dann $([w]_a)^j = [w^i]_{a'}$, wenn wir für a' die Folge $(a_i - j + l(i-1))a^{i+1}$ wählen.

Bsp.: Für $w = (bc)^\omega$ und $a = 2^\omega$ gilt $[w]_a = (bcc)^\omega$. Für $j = 1$ wäre dann $([w]_a)^1 = bcc(bbcc)^\omega$. Wir haben also $l(0) = 2$, also $l(-1) \leq 1 < l(0)$ und damit $i = 0$. Damit ergibt sich die Folge $(a_0 - j + l(-1))(2)^\omega = 12^\omega$. Das führt auf $[w^0]_{a'} = bcc(bbcc)^\omega$, wie gewünscht.

$\phi = \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$: Wir nehmen wieder an, dass $w \models \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ gilt und wählen m minimal mit $w^m \models \psi_2$, so dass $w^l \models \psi_1$ für alle $l < m$ gilt.

Wir müssen wieder für eine beliebige (aber feste) Folge a zeigen, dass dann auch $[w]_a \models \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ gilt, wobei wir durch die Induktion bereits wissen, dass $w' \models \psi_i \Rightarrow [w']_{a'} \models \psi_i$ für alle a', w' gilt.

Zunächst müssen wir ein j mit $([w]_a)^j \models \psi_2$ finden. Da wir bereits $w^m \models \psi_2$ wissen, und damit auch $[w^m]_{a'} \models \psi_2$ für beliebige a' , müssen wir a' und j nur geeignet wählen, so dass $([w]_a)^j = [w^m]_{a'}$ gilt (Beachte: bei $\mathbf{G} \psi$ mussten wir m und a' anpassen). Man setze $j = l(m-1)$ und $a' = a^m$. (Bsp.: Sei wieder $w = (bbc)^\omega$, $a = (2)$ und $\phi = b \mathbf{U} c$. m wäre dann gleich 2 und j würde sich zu $l(2-1) = l(1) = a_0 + a_1 = 4$ ergeben. Man beachte $[w]_{(2)} = bbbbcc$, also $w_4 = c$.)

Jetzt bleibt nur noch für jedes $i < j$ zu zeigen, dass auch $([w]_a)^i \models \psi_1$ gilt. Hierfür müssen wir nur ein geeignetes $k < m$ und a' finden mit $([w]_a)^i = [w^k]_{a'}$. Jetzt ist wieder i fest vorgegeben und wir können genauso vorgehen wie im Fall von $\mathbf{G} \psi$.

A1.3

(a) Nach Definition gilt

$$w \models^\infty \mathbf{G} \psi \Leftrightarrow w \models^\infty \neg(\mathbf{true} \mathbf{U} \neg\psi) \Leftrightarrow \forall i \in Pos(w) : w^i \models^\infty \psi.$$

Bezüglich \models^∞ fordert \mathbf{G} also nicht, dass w unendlich lang sein muss.

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{X} \mathbf{G} a \rrbracket_\infty &= \Sigma(\{a\}^* + \{a\}^\omega) \\ \llbracket \mathbf{G} \mathbf{X} a \rrbracket_\infty &= \Sigma\{a\}^\omega \\ \llbracket \mathbf{G} \mathbf{X} a \rrbracket &= \Sigma\{a\}^\omega \\ \llbracket \mathbf{X} \mathbf{G} a \rrbracket &= \Sigma\{a\}^\omega \end{aligned}$$

(b) a soll entlang w unendlich oft gelten. Die Teilformel $\mathbf{true} \wedge \mathbf{G} \mathbf{X} \mathbf{true}$ ist zumindest nur für nicht-endliche Worte erfüllt. Da für Worte aus Σ^ω die beiden Semantiken übereinstimmen, kann dann einfach die Formel $\mathbf{true} \wedge \mathbf{G} \mathbf{X} \mathbf{true} \wedge \mathbf{G} \mathbf{F} a$ gewählt werden.

Zur Anmerkung: Wäre $w \models^\infty \mathbf{X} \phi$ durch $(1 \in Pos(w)) \rightarrow (w^1 \models^\infty \phi)$ definiert worden, so wäre es nicht mehr möglich gewesen zu fordern, dass eine Nachfolgeposition existieren muss.