Übungen zu Model Checking

Besprechung am 01.06.06

Aufgabe 2.1 ω-reguläre Sprachen vs. reguläre Sprachen

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass man jeden Büchi-Automaten in endlich viele endliche Automaten „zerlegen" kann.

Zeigen Sie, dass für jeden Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ über dem Alphabet Σ reguläre Sprachen $U_i, V_i \subseteq \Sigma^*$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ existieren mit

$$L(\mathcal{B}) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i V_i^{\omega}.$$

Dabei ist n eine Konstante, welche allein von der Anzahl der akzeptierenden Zustände von $\mathcal{B}$ abhängt.

Hinweis: *Betrachten Sie hierzu für ein Wort $w = w_0 w_1 w_2 \ldots \in L(\mathcal{B})$ eine akzeptierende Berechnung $q = q_0 q_1 \ldots$ von $\mathcal{B}$ mit $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_i)$. Es muss somit ein akzeptierender Zustand q_a unendlich oft in q auftreten. Zerlegen Sie dann mit Hilfe von q_a den Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ geeignet in endliche Automaten.*

Aufgabe 2.2

In dieser Aufgabe verallgemeinern Sie das Resultat, dass endliche Automaten und reguläre Ausdrücke äquivalent sind, auf ω-reguläre Ausdrücke und (nichtdeterminisitische) Büchi-Automaten.

Sei Σ ein Alphabet, d.h., eine beliebige endliche, nicht-leere Menge. Dann ist $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ die Menge aller abzählbaren Wörter über Σ. Die Sprache $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ der regulären Ausdrücke über Σ ist, wie bekannt, folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}^0_{\text{reg}} & := & \{\emptyset\} \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\} \\ \mathcal{L}^{i+1}_{\text{reg}} & := & \mathcal{L}^i_{\text{reg}} \cup \{(\phi + \psi), \phi\psi, (\phi)^* \mid \phi, \psi \in \mathcal{L}^i_{\text{reg}}\} \\ \mathcal{L}_{\text{reg}} & := & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^i_{\text{reg}}. \end{array}$$

(Anmerk.: $\mathcal{L}^i_{\text{reg}}$ enthält gerade die in $\leq i$ vielen Schritten definierten regulären Ausdrücke und $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ sammelt schließlich alle auf.)

Entsprechend ist die Sprache $\mathcal{L}_{\omega\text{-reg}}$ der ω-regulären Ausdrücke über Σ gegeben durch

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}^0_{\omega\text{-reg}} & := & \mathcal{L}_{\text{reg}} \cup \{(\phi)^\omega \mid \phi \in \mathcal{L}_{\text{reg}}\} \\ \mathcal{L}^{i+1}_{\omega\text{-reg}} & := & \mathcal{L}^i_{\omega\text{-reg}} \cup \{(\phi + \psi) \mid \phi, \psi \in \mathcal{L}^i_{\omega\text{-reg}}\} \cup \{\phi\psi \mid \phi \in \mathcal{L}_{\text{reg}}, \psi \in \mathcal{L}^i_{\omega\text{-reg}}\} \; . \\ \mathcal{L}_{\omega\text{-reg}} & := & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^i_{\omega\text{-reg}} \end{array}$$

Die etwas umständliche formale Definition stellt nur sicher, dass in jeder Teilformel eines ω-regulären Ausdrucks der Operator ω höchstens einmal auftritt. Man beachte weiterhin, dass die Definition von $\mathcal{L}^{i+1}_{\omega\text{-reg}}$ es nicht gestattet, an einen ω-regulären Ausdruck einen weiteren ω-regulären Ausdruck anzuhängen.

Die Semantik $L(\phi) \subseteq \Sigma^\infty$ eines ω-regulären Ausdrucks $\phi \in \mathcal{L}_{\omega\text{-reg}}$ ist dann induktiv über den Formelaufbau definiert:

$$\begin{array}{lcl} L(\emptyset) & := & \emptyset \\ L(\varepsilon) & := & \{\varepsilon\} \\ L(a) & := & \{a\} \; (\forall a \in \Sigma) \\ L((\phi + \psi)) & := & L(\phi) \cup L(\psi) \\ L((\phi)^*) & := & \{w_0 w_1 \ldots w_n \mid \forall n \in \mathbb{N} \, \forall i \leq n : w_i \in L(\phi)\} \\ L(\phi\psi) & := & \{uw \mid u \in L(\phi), w \in L(\psi)\} \\ L((\phi)^\omega) & := & \{w_0 w_1 w_2 \ldots \mid \forall n \in \mathbb{N} \, w_n \in L(\phi)\} \end{array}$$

(a) Machen Sie sich an einem Beispiel klar, dass jeder endliche Automat als ein Büchi-Automat mit ε-Transitionen dargestellt werden kann. Dabei gelte $\varepsilon^\omega := \varepsilon$. Folgern Sie weiterhin, dass es zu einem Büchi-Automaten mit ε-Transitionen im Allgemeinen keinen äquivlanten Büchi-Automaten ohne ε-Transitionen geben kann.

(b) Zeigen Sie, dass es für jeden ω-regulären Ausdruck $\phi \in \mathcal{L}_{\omega\text{-reg}}$ einen nichtdeterministischen Büchi-Automaten $\mathcal{B}_\phi$ mit $L(\mathcal{B}_\phi) = L(\phi)$ gibt. Ihre Büchi-Automaten dürfen auch ε-Übergänge besitzen.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 2.1. auch die Umkehrung der Aussage, d.h. dass es zu jedem Büchi-Automaten auch einen äquivalenten ω-regulären Ausdruck gibt.

Hinweis: *Verwenden Sie die bekannten Sätze über die Äquivalenz von regulären Ausdrücken und endlichen Automaten.*

Aufgabe 2.3 Büchi-Automaten: deterministisch vs. nichtdeterministisch

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass nichtdeterministische Büchi-Automaten mächtiger als deterministische Büchi-Automaten sind.

(a) Geben Sie einen nichtdeterministischen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ für die Sprache

$$L := L((a+b)^*(b)^\omega) = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid \#_a(w) < \infty\}$$

an. Hierbei sei $\#_a(w)$ die Anzahl der as in w.

(b) Determinisieren Sie den Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ aus der letzten Teilaufgabe mit Hilfe des Verfahrens für endliche Automaten (Potenzmengenkonstruktion). Der so erhaltene Büchi-Automat heiße $\mathcal{B}'$. Geben Sie dann $L(\mathcal{B}')$ an.

(c) Zeigen Sie, dass es keinen deterministischen Büchi-Automaten gibt, welcher L akzeptiert.

Führen Sie hierfür wie folgt einen Widerspruchsbeweis, indem Sie annehmen, dass $\mathcal{B}'' = (Q, \{a,b\}, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer Büchi-Automat sei mit $L(\mathcal{B}'') = L$.

Betrachten Sie dann die Folge von Wörtern $w_0 = b^\omega, w_1 = b^{k_0}ab^\omega, w_2 = b^{k_0}ab^{k_1}ab^\omega, \ldots$. Beachten Sie, dass hier der untere Index das m-te Wort in der Folge kennzeichnet. Es wird daher im Folgenden das i-te Zeichen eines ω-Worts w mittels $w(i)$ bezeichnet. Das Wort w_{m+1} ergibt sich dabei aus dem Wort w_m, indem man zunächst k_m als den kleinsten Index wählt, so dass

(1) $\mathcal{B}''$ nach Lesen des Präfix $w_m(0)\ldots w_m(k_m)$ sich in einem akzeptierenden Zustand aus F befindet und

(2) der Präfix $w_m(0)\ldots w_m(k_m)$ bereits alle as von w_m enthält.

Da w_m nach Konstruktion nur endlich viele as enthält und somit in $L = L(\mathcal{B}'')$ liegt, existiert dieses k_m. Es sei dann $w_{m+1} = w_m(0)\ldots w_m(k_m)ab^\omega$. Damit enthält w_m nach Konstruktion genau m as und liegt damit in L.

Betrachten Sie nun, wie sich $\mathcal{B}''$ bezüglich dieser Folge von Wörtern $w_m \in L$ verhalten muss und leiten Sie damit einen Widerspruch ab.

Aufgabe 2.4 LTL zu Büchi-Automat

(a) Auf dem letzten Aufgabenblatt wurden NF-**LTL**-Formeln definiert. Diese verwenden $\mathbf{G}$ anstatt $\mathbf{R}$, um die Negation von $\phi\,\mathbf{U}\,\psi$ darstellen zu können.

(Erinnerung: $\neg(\phi_1\,\mathbf{U}\,\phi_2) \equiv (\neg\phi_1)\,\mathbf{R}(\neg\phi_2) \equiv (\mathbf{G}\,\neg\phi_2) \vee ((\neg\phi_2)\,\mathbf{U}(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)))$

Welchen Vorteil bietet die Darstellung mittels $\mathbf{R}$ in Bezug auf das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren zur Konstruktion eines entsprechenden Büchi-Automaten?

(b) Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen Büchi-Automaten für die Formel $p\,\mathbf{R}\,q$ über dem Alphabet $2^{\mathbf{AP}}$ mit $\mathbf{AP} = \{p, q\}$.

(c) Geben Sie einen möglichst kleinen Büchi-Automaten für die Formel $(\mathbf{G}\,p) \rightarrow (p\,\mathbf{U}\,q)$ an. Sie müssen *nicht* den Algorithmus aus der Vorlesung verwenden.

Aufgabe 2.5

In der Grundlagenvorlesung wurde in einer Übungsaufgabe untersucht, wie viele *semantisch* unterschiedliche CTL-Formeln der Form $O_1O_2O_3\ldots O_n\phi$ existieren, wobei ϕ eine bel. CTL-Formel war und O_i entweder $\mathbf{AG}$ oder $\mathbf{EF}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

In dieser Aufgabe sollen Sie das entsprechende Problem für eine bel. LTL-Formel ϕ und O_i entweder $\mathbf{G}$ oder $\mathbf{F}$ untersuchen.

Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,\phi \equiv \mathbf{G}\,\mathbf{F}\,\phi$ gilt.
- Verwenden Sie dieses Resultat, um auch $\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,\phi \equiv \mathbf{F}\,\mathbf{G}\,\phi$ zu zeigen. Man beachte hierbei $\mathbf{F} \equiv \neg\,\mathbf{G}\,\neg$.