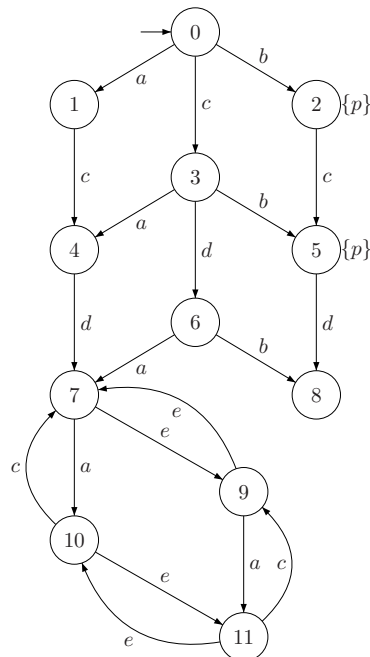


Übungen zu Model Checking

Besprechung am 22.06.06

Aufgabe 3.1 Ample Sets



Betrachten Sie die oben abgebildete Kripkestruktur \mathcal{K} mit der Zustandsmenge $S = \{0, \dots, 11\}$, der Menge von Aktionen $A = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbf{AP} = \{p\}$ und $\nu(2) = \nu(5) = \{p\}$, $\nu(s) = \{\}$ für $s \in S \setminus \{2, 5\}$. (Die Aussage p ist also nur in den Zuständen 2 und 5 erfüllt, siehe auch obige Abbildung)

- Stellen Sie die Unabhängigkeitsrelation $I \subseteq A \times A$ auf und geben Sie für jede Aktion $a \in A$ an, ob diese sichtbar oder unsichtbar ist.
- Geben Sie eine reduzierte Kripkestruktur \mathcal{K}_R an, welche stotteräquivalent zu \mathcal{K} ist. Geben Sie hierfür den Bedingungen C0–C3 entsprechende Mengen $ample(s)$ für alle $s \in S$ an.

Hinweis: Eine minimale, reduzierte Kripkestruktur hat 2 Zustände und 8 Transitionen weniger.

Aufgabe 3.2 LTL-X

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass eine **LTL**-Formel genau dann stotterfrei ist, falls diese in eine äquivalente **LTL**-Formel transformiert werden kann, in welcher der Operator **X** nicht auftritt.

AP sei eine endliche, nicht-leere Menge von atomaren Propositionen und $\Sigma = 2^{\mathbf{AP}}$. Weiterhin sei **LTL-X** die Menge aller **LTL**-Formeln, welche nicht den Operator **X** verwenden, das heißt, es kommen nur die Operatoren $\{\mathbf{U}, \neg, \vee\}$ in einer solchen Formel vor.

Ein Wort $w \in \Sigma^\omega$ heißt *stotterfrei*, falls

$$\forall i \in \mathbb{N} : \left((w_i = w_{i+1}) \rightarrow (\forall k \geq i : w_i = w_k) \right)$$

Das heißt, sobald ein Buchstabe $s \in \Sigma$ in w zweimal hintereinander auftritt, wiederholt sich s ab dieser Position für immer.

- Zeigen Sie, dass jeder Suffix v eines stotterfreien Wortes $w = uv$ ($u \in \Sigma^*$, $w, v \in \Sigma^\omega$) wieder stotterfrei ist.
- Geben Sie eine **LTL**-Formel an, welche genau alle stotterfreien Wörter über Σ als Modell hat.

Hinweis: Kodieren Sie hierfür jeden Buchstaben $s \in \Sigma$ geeignet als aussagenlogische Formel β_s über **AP**, so dass für ein Wort $w \in \Sigma^\omega$ genau dann $w \models \beta_s$ gilt, falls $w_0 = s$.

- Für ein Wort $w \in \Sigma^\omega$ sei $[w] \in \Sigma^\omega$ das Wort, welches aus w entsteht, indem jede endliche Wiederholung eines Buchstabens $a \in \Sigma$ in w auf ein einziges Vorkommen von a gekürzt wird.

Beispiele: $[(abb)^\omega] = (ab)^\omega$, $[(a)^\omega] = (a)^\omega$.

Machen Sie sich klar, dass $[w]$ immer stotterfrei ist.

Zeigen Sie, dass für zwei stotteräquivalente Wörter w_1, w_2 stets $[w_1] = [w_2]$ gilt.

- (d) Zeigen Sie für eine beliebige **LTL**_{-X}-Formel ϕ und zwei beliebige stotteräquivalente Wörter $u, w \in \Sigma^\omega$ mittels Induktion über den Formelaufbau:

$$u \models \phi \Leftrightarrow w \models \phi.$$

- (e) Zeigen Sie für zwei stotterinvariante **LTL**-Formeln ϕ und ψ , dass bereits $\phi \equiv \psi$ gilt, falls für jedes stotterfreie Wort w

$$w \models \psi \Leftrightarrow w \models \phi$$

gilt. Das heißt, die Semantik der beiden stotterinvarianten Formeln stimmt bereits überein, falls die Formeln nur bezüglich der stotterfreien Wörter übereinstimmen.

- (f) Sei $w \in \Sigma^*$ stotterfrei und $s, s' \in \Sigma$ mit $s \neq s'$. Zeigen Sie, dass dann

$$w \models \beta_s \wedge \mathbf{X} \beta_{s'} \Leftrightarrow w \models \beta_s \mathbf{U} \beta_{s'}$$

gilt.

- (g) Sei φ eine beliebige **LTL**-Formel. Geben Sie ein Verfahren an mittels Induktion/Rekursion über den Formelaufbau, welches zu φ eine **LTL**_{-X}-Formel τ_φ konstruiert, wobei φ und τ_φ sich bezüglich stotterfreier Wörter w nicht unterscheiden lassen. D.h. es darf durchaus ein $w \in \Sigma^\omega$ existieren, so dass z.B. $(w \models \varphi) \wedge (w \not\models \tau_\varphi)$ gilt. Es muss jedoch stets

$$([w] \models \varphi) \Leftrightarrow ([w] \models \tau_\varphi)$$

gelten.

Hinweis: Unterscheiden Sie im Fall von $\phi = \mathbf{X} \phi'$ und $x \models \phi$ mit x stotterfrei durch geeignete Teilformeln, ob $x_0 = x_1$ (und daher $x = (x_0)^\omega$) oder $x_0 \neq x_1$ gilt. Nutzen Sie dann (f).

- (h) Zeigen Sie nun, dass für jede stotterinvariante **LTL**-Formel ϕ eine semantisch äquivalente **LTL**_{-X}-Formel ψ existiert.

Hinweis: Nutzen Sie hierfür Teilaufgaben (d), (e), (g).