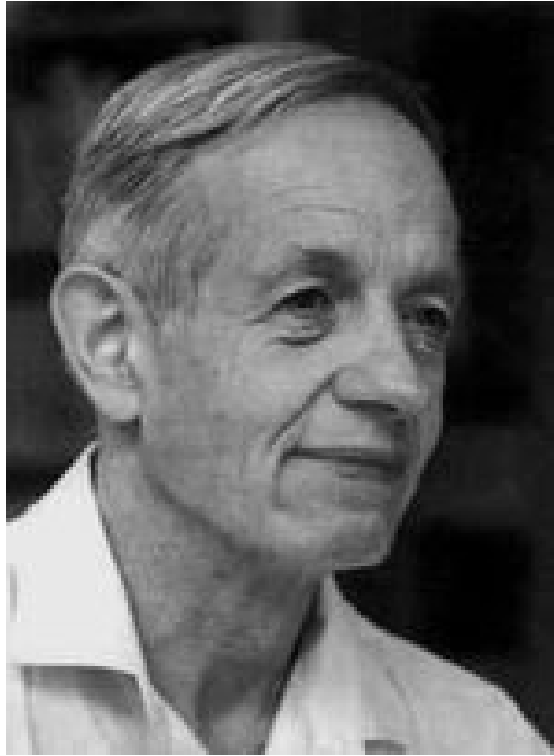


# Hauptseminar Nash Gleichgewicht

Patrick Schaffroth



### John Forbes Nash jr.

- Geboren: 13. Juni 1928 in Bluefield, West Virginia USA
- Zwischen 1945 und 1948 studierte er am Carnegie Institute of Technology in Pittsburgh.
- Ursprünglich wollte er wie sein Vater Ingenieur werden, entwickelte jedoch eine große Vorliebe für die Mathematik.
- 1949 promovierte er an der Princeton University. Die Arbeit hatte den Titel Non-cooperative Games und erweitert die Spieltheorie Oskar Morgensterns und John von Neumanns. In dieser Arbeit wurden Grundlagen dessen beschrieben, was später als Nash-Gleichgewicht bekannt wurde.
- 1959 wurde bei ihm eine paranoide Schizophrenie diagnostiziert, nachdem 1958 die ersten Anzeichen seiner Erkrankung sichtbar waren.
- 1964 war er so stark erkrankt, dass er eine längere Zeit in die psychiatrische Klinik eingeliefert werden musste. Infolge seiner Erkrankung erschienen zwischen 1966 und 1996 keinerlei Publikationen von ihm.
- Er konnte sich von seiner Krankheit in den neunziger Jahren erholen.
- 1994 wurde ihm für seine Doktorarbeit, rund 45 Jahre später, der Nobelpreis der Wirtschaftswissenschaften verliehen.
- Heute lebt er mit seiner Frau Alicia Larde zusammen. Er hat mit ihr einen Sohn, John Charles, ferner einen etwas älteren Sohn, John David, dessen Mutter Eleanor Stier ist.

# Inhaltsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Einleitung .....  | 4  |
| 2   | Grundlagen der Spieltheorie.....                          | 4  |
| 2.1 | Strategisches Spiel .....                                 | 4  |
| 2.2 | Beispiel: Gefangenenproblem .....                         | 5  |
| 3   | Gleichgewichtsbedingung .....                             | 6  |
| 3.1 | Beispiel: Bach oder Strawinski?.....                      | 7  |
| 4   | Beste-Antwort-Funktionen .....                            | 7  |
| 4.1 | Methode um Nash Gleichgewichte zu finden .....            | 8  |
| 4.2 | Beispiel: Synergetische Beziehung zweier Individuen ..... | 9  |
| 5   | Besondere Nash Gleichgewichte.....                        | 11 |
| 5.1 | Beispiel: Fußballspiel .....                              | 11 |
| 6   | Zusammenfassung .....                                     | 13 |

## 1 Einleitung

Das Nash-Gleichgewicht ist ein zentraler Begriff der mathematischen Spieltheorie. Es beschreibt in Spielen einen Zustand eines strategischen Gleichgewichts, von dem ausgehend kein einzelner Spieler für sich einen Vorteil erzielen kann, indem er allein seine Strategie verändert. Definition und Existenzbeweis des Nash-Gleichgewichts gehen auf die 1950 veröffentlichte Dissertation des Mathematikers John Forbes Nash Jr. zurück.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie ein strategisches Spiel definiert ist, und wie man ein solches Spiel als Tabelle repräsentieren kann.

## 2 Grundlagen der Spieltheorie

### 2.1 Strategisches Spiel

**Definition 1.** *Jeder Spieler besitzt eine endliche Menge von Aktionen. Ein Aktionsprofil besteht aus einer Liste von Aktionen, so dass jedem Spieler genau eine Aktion zugeordnet wird.*

**Beispiel 0.** In einem Zwei-Personen Spiel entscheidet sich Spieler 1 für die Aktion 'nochmal würfeln' und Spieler 2 für die Aktion 'Ereigniskarte ziehen'. Das Aktionsprofil würde in diesem Fall so aussehen:

$$\overbrace{(\text{'nochmal würfeln'})}^{\text{Spieler 1}}, \overbrace{(\text{'Ereigniskarte ziehen'})}^{\text{Spieler 2}}$$

**Definition 2.** *Ein strategisches Spiel besteht aus einer endliche Menge an Spielern. Jeder Spieler besitzt eine nichtleere Menge von Aktionen und für jeden Spieler gibt es Präferenzen über der Menge der Aktionsprofile.*

Grundlegende Annahmen sind hierbei, dass sämtliche Spieler **rational handeln**. Rationales Handeln bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Spieler, sofern sie über mehr als eine Aktionsalternative verfügen, die Aktionsalternative auswählen, die nach ihrer Kenntnis den größten Nutzen erbringt. Man geht davon aus, dass die Fähigkeit der Spieler zur Analyse der Spielzüge ideal ist.

Wenn ein Spieler die Kenntnis über alle Aktionsalternativen besitzt, wie beispielsweise beim Schach oder beim Damespiel, dann sagt man auch, dass die Spieler **vollständige Information** über die Regeln des Spiels besitzen.

Ein Beispiel für ein Spiel mit unvollständiger Information wäre das Skatspiel, bei dem zwei Spieler gemeinsam gegen einen anderen Spieler spielen, sich dabei aber nicht in die Karten schauen können.

Präferenzen bezüglich einer Aktion können direkt vom Spieler angegeben werden oder durch eine Funktion repräsentiert werden.

**Definition 3.** *Sei  $u_i : a \rightarrow \mathbb{R}$  die Auszahlungsfunktion des Spielers  $i$ , die jedem Aktionsprofil einen reellen Nutzwert für einen Spieler  $i$  zuordnet.*

**Beispiel 1.** Einem Spieler stehen drei Aktionsprofile zur Auswahl. Diese Aktionsprofile seien mit a, b und c benannt. Die Präferenzen dieses Spielers seien  $u(a) = 0$ ,  $u(b) = 1$  und  $u(c) = 100$ , d.h. der Spieler bevorzugt das Aktionsprofil c gegenüber dem Aktionsprofil b und er bevorzugt das Aktionsprofil b gegenüber dem Aktionsprofil a. Es wäre falsch, anzunehmen, dass derselbe Spieler das Aktionsprofil c stark gegenüber dem Aktionsprofil b bevorzugt, während er zwischen den Aktionsprofilen a und b fast indifferent ist. Eine Auszahlungsfunktion beinhaltet keine Informationen darüber, wie intensiv ein Aktionsprofil präferenziert wird.

## 2.2 Beispiel: Gefangenengenproblem

Zwei verdächtige Personen eines schweren Verbrechens werden in einzelnen Zellen untergebracht. Es gibt genügend Beweise, beide für ein minderschweres Vergehen zu verurteilen, aber nicht genügend Beweise, um einen der Angeklagten für das Begehen des schweren Verbrechens zu verurteilen, es sei denn, dass einer zu Lasten des anderen aussagt.

Wenn beide Angeklagten schweigen, werden sie nur für das minderschwere Vergehen verurteilt und verbringen ein Jahr im Gefängnis.

Wenn genau ein Angeklagter zu Lasten des anderen aussagt, bleibt dieser Straffrei, wohingegen der Beschuldigte vier Jahre im Gefängnis verbringen muss.

Wenn beide Angeklagten sich gegenseitig Beschuldigen müssen sie beide drei Jahre im Gefängnis verbringen.

Diese Situation kann als ein strategisches Spiel aufgefasst werden:

- Spieler:** Die zwei verdächtigen Personen
- Aktion:** Die Aktionsmenge jedes Spielers besteht aus  $S = \text{Schweigen}$ ,  $M = \text{Mitspieler beschuldigen}$
- Präferenzen:**  
 Präferenzordnung für Spieler 1 (vom Besten zum Schlechtesten Aktionsprofil):  
 $(M, S), (S, S), (M, M), (S, M)$   
 Präferenzordnung für Spieler 2 (vom Besten zum Schlechtesten Aktionsprofil):  
 $(S, M), (S, S), (M, M), (M, S)$

Das Spiel kann kompakt in einer Tabelle (Auszahlungsmatrix) repräsentiert werden. Wir wählen eine Auszahlungsfunktion, welche als Funktionsparameter das Aktionsprofil erhält, und die Präferenzordnung der verdächtigen Personen widerspiegelt.

Für Spieler 1 gilt:

$$u_1(M, S) > u_1(S, S) > u_1(M, M) > u_1(S, M)$$

Eine einfache Spezifikation dieser Funktion wäre:

$$u_1(M, S) = 3, u_1(S, S) = 2, u_1(M, M) = 1, u_1(S, M) = 0$$

(für  $u_2$  analog)

| (Spieler 1, Spieler 2)  | Schweigen | Mitspieler beschuldigen |
|-------------------------|-----------|-------------------------|
| Schweigen               | 2,2       | 0,3                     |
| Mitspieler beschuldigen | 3,0       | 1,1                     |

Die Aktionen von Spieler 1 stehen unterhalb (Spieler 1, Spieler 2) in der ersten Spalte und die Aktionen von Spieler 2 in der ersten Zeile der restlichen Spalten. Die Zahlenwerte in den Zellen beschreiben die Auszahlungen von Spieler 1 und Spieler 2 unter Berücksichtigung der gewählten Aktionen. '2,3' beispielsweise bedeutet, dass Spieler 1 die Auszahlung 2 bekommt, Spieler 2 hingegen die Auszahlung 3.

### 3 Gleichgewichtsbedingung

**Definition 4.** Sei  $a$  ein Aktionsprofil, in dem die Aktion jedes Spielers  $i$   $a_i$  ist. Sei  $a'_i$  eine Aktion von Spieler  $i$ , dann definiert  $(a'_i, a_{-i})$  das Aktionsprofil, in dem alle anderen Spieler  $j$  außer Spieler  $i$  Aktion  $a_j$  auswählen, wobei der Spieler  $i$  die Aktion  $a'_i$  auswählt.

**Definition 5.** Das Aktionsprofil  $a^*$  in einem strategischen Spiel mit ordinalen Präferenzen ist ein Nash Gleichgewicht, wenn für jeden Spieler  $i$  und jede Aktion  $a_i$  des Spielers  $i$ ,  $a^*$  mindestens so gut ist bezüglich der Präferenzen von Spieler  $i$  als das Aktionsprofil  $(a_i, a_{-i}^*)$  in welchem Spieler  $i$   $a_i$  auswählt, während jeder andere Spieler  $j$   $a_j^*$  auswählt.

Gleichzeitig gilt für jeden Spieler  $i$ :

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \quad (1)$$

für jede Aktion  $a_i$  von Spieler  $i$ , wobei  $u_i$  die Auszahlungsfunktion ist, die die Präferenzen von Spieler  $i$  repräsentiert.

Im Spiel 'Gefangenenenproblem' ist das Aktionspaar (M,M) ein Nash Gleichgewicht, denn wenn Spieler 2 sich für 'Mitspieler beschuldigen' entscheidet, dann ist es für Spieler 1 besser 'Mitspieler beschuldigen', als 'Schweigen' zu wählen.

Kein anderes Aktionsprofil ist ein Nash Gleichgewicht:

**Beweis direkt:**

□ **(S,S):** Erfüllt (1) nicht. Wenn Spieler 2 'Schweigen' wählt, überschreitet die Auszahlung von Spieler 1 für 'Mitspieler beschuldigen' seine Auszahlung für 'Schweigen'.

- (M,S):** Erfüllt (1) nicht. Wenn Spieler 1 'Mitspieler beschuldigen' wählt, überschreitet die Auszahlung von Spieler 2 für 'Mitspieler beschuldigen' seine Auszahlung für 'Schweigen'.
- (S,M):** Erfüllt (1) nicht. Wenn Spieler 2 'Mitspieler beschuldigen' wählt, überschreitet die Auszahlung von Spieler 1 für 'Mitspieler beschuldigen' seine Auszahlung für 'Schweigen'.

Das eigentliche Problem beim Spiel 'Gefangenenproblem' ist, dass die verdächtigen Personen nicht miteinander kooperieren können, da sie in unterschiedlichen Zellen sitzen. Gelänge es ihnen, miteinander zu kooperieren, so könnten sie sich auf das Aktionsprofil (Schweigen, Schweigen) einigen, das einen bestmöglichen Ausgang für beide Spieler sichert. Mangelndes gegenseitiges Vertrauen zwingt die verdächtigen Personen jedoch zu dem Aktionsprofil (Mitspieler beschuldigen, Mitspieler beschuldigen).

Im folgenden Spiel dürfen die Spieler kooperieren und sie sind einig, dass es besser ist zu kooperieren, als nicht zu kooperieren, dennoch verfolgen beide Spieler ein jeweils konträres Ziel.

### 3.1 Beispiel: Bach oder Strawinski?

Christian und Sandra möchten gerne auf ein Konzert gehen. Zwei Konzerte stehen ihnen zur Auswahl: Eines mit der Musik von Bach und das andere mit der Musik von Strawinski. Christian bevorzugt Bach und Sandra bevorzugt Strawinski. Beide möchten gerne gemeinsam das Konzert genießen und wären gleichermaßen unzufrieden, wenn sie getrennt ihre jeweilige Lieblingsmusik hören würden.

Repräsentation des 'Bach oder Strawinski' - Spiel als Tabelle:

| (Christian, Sandra) | Bach | Strawinski |
|---------------------|------|------------|
| Bach                | 2,1  | 0,0        |
| Strawinski          | 0,0  | 1,2        |

Im Folgenden werden Beste-Antwort-Funktionen verwendet, um Nash Gleichgewichte zu ermitteln.

## 4 Beste-Antwort-Funktionen

Es ist kein Problem Nash Gleichgewichte in Spielen zu finden, in denen jeder Spieler nur wenige Aktionsalternativen hat, indem man alle Aktionsprofile untersucht und prüft, ob sie die Gleichgewichtsbedingung erfüllen.

In komplizierteren Spielen ist es meistens besser mit Hilfe der Beste-Antwort-Funktionen der einzelnen Spieler ein Nash Gleichgewicht herauszufinden.

Im 'Bach oder Strawinski' - Spiel ist beispielsweise 'Bach' die beste Aktion für Spieler 1, wenn Spieler 2 'Bach' auswählt. 'Strawinski' hingegen ist die beste Aktion für Spieler 1, wenn Spieler 2 'Strawinski' auswählt. Spieler 1 hat also für jede Aktion

von Spieler 2 eine beste Aktion.

Sei  $B_i(a_{-i})$  die Menge der besten Aktionen des  $i$ -ten Spielers, falls die Liste der anderen Aktionen der Spieler  $a_{-i}$  ist.

In BoS haben wir beispielsweise  $B_1(Bach) = \{Bach\}$  und  $B_1(Strawinski) = \{Strawinski\}$

**Definition 6.**  $B_i$  heißt genau dann Beste-Antwort-Funktion des Spielers  $i$ , wenn

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \text{ für alle } a'_i \in A_i\} \quad (2)$$

erfüllt ist.

Jede Aktion in  $B_i(a_{-i})$  ist mindestens so gut für Spieler  $i$ , wie jede andere Aktion von Spieler  $i$ , wenn die anderen Aktionen der Spieler durch  $a_{-i}$  gegeben sind.

**Bemerkung:** Das Aktionsprofil  $a^*$  ist genau dann ein Nash Gleichgewicht eines strategischen Spiels mit ordinalen Präferenzen, wenn die Aktion jedes Spielers eine Beste-Antwort zu den Aktionen der anderen Spielern ist.

Für alle Spieler  $i$  gilt:

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad (3)$$

In diesem Fall, wo jede Liste  $a_{-i}$  der Aktionen der anderen Spieler aus nur einer Besten-Antwort besteht, können wir das einzelne Element von  $B_i(a_{-i})$  durch  $b_i(a_{-i})$  definieren.

Formel (3) ist somit äquivalent zu

$$a_i^* = b_i(a_{-i}^*) \quad (4)$$

#### 4.1 Methode um Nash Gleichgewichte zu finden

- Finde zuerst die Beste-Antwort-Funktion jedes Spielers auf alle Aktionen der anderen Spieler und markiere die Besten-Antworten durch einen Stern.
- Finde die Aktionsprofile, die Bedingung (1) erfüllen, d.h. die Aktionsprofile bei denen jede Komponente durch einen Stern markiert wurde.

Beispiel BoS nach Anwendung dieser Beschreibung:

|                     |       |            |
|---------------------|-------|------------|
| (Christian, Sandra) | Bach  | Strawinski |
| Bach                | 2*,1* | 0,0        |
| Strawinski          | 0,0   | 1*,2*      |

BoS besitzt 2 Nash Gleichgewichte: (Bach,Bach) und (Strawinski, Strawinski). Wenn beispielsweise Christian 'Bach' wählt und Sandra 'Bach' wählt, so ist die Auszahlung für Christian zwei, und für Sandra eins. Wenn Sandra 'Strawinski' wählt, so beträgt die Auszahlung null. Im Falle, dass Christian zuerst eine Aktion wählen darf, haben Christian und Sandra die für sie beste Entscheidung getroffen, wenn sie (Bach, Bach) wählen.

Im nächsten Beispiel geht es um ein Spiel, bei dem die Menge der Aktionsprofile unendlich viele Elemente enthält.

## 4.2 Beispiel: Synergetische Beziehung zweier Individuen

Zwei Individuen leben in einer synergetischen Beziehung. Wenn beide Individuen sich mehr um eine Zusammenarbeit bemühen, profitieren beide davon. Für jeden Grad der Anstrengung in die Zusammenarbeit eines Individuums  $i$ , wächst der Grad der Zusammenarbeit eines Individuums  $j$  zuerst an, bis er ein Maximum erreicht, und schrumpft dann wieder.

Das folgende Strategische Spiel modelliert diese Spielsituation

- Spieler:** Die zwei Individuen
- Aktionen:** Die Menge der Aktionen eines jeden Spielers ist die Menge der Anstrengungsgrade (nicht-negative Zahl)
- Präferenzen:** Die Präferenzen von Spieler  $i$  werden durch die folgende Auszahlungsfunktion repräsentiert:  $u_i = a_i(c + a_j - a_i)$  für  $i = 1,2$  und einer beliebigen, aber festen Konstanten  $c \in \mathbb{R}$

Um letztendlich das Nash Gleichgewicht dieses Spiels zu finden, können wir die Beste-Antwort-Funktion analysieren. Wenn  $a_j$  gegeben ist, dann ist die Auszahlungsfunktion des Individuums  $i$  eine quadratische Funktion von  $a_i$ , die null ist, wenn  $a_i = 0$  bzw.  $a_i = c + a_j$ , und ein Maximum dazwischen erreicht. Aus der Symmetrie der quadratischen Funktion folgt, dass die Beste-Antwort-Funktion eines jeden Individuums  $i$  bei der Aktion  $a_j$   $b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j)$  ist.

In Abbildung 1 ist  $b_1$  die Beste-Antwort Funktion von Spieler 1 und bildet eine beliebige, aber feste Aktion  $a_2$  von Spieler 2 (der vertikalen Achse) auf eine Beste-Antwort  $a_1$  des Spieler 1 (auf der horizontalen Achse) ab.  $b_2$  ist die Beste-Antwort Funktion von Spieler 2 und bildet eine beliebige, aber feste Aktion  $a_1$  von Spieler 1 (der horizontalen Achse) auf eine Beste-Antwort  $a_2$  des Spieler 2 (auf der vertikale Achse) ab.

Im Schnittpunkt dieser zwei Beste-Antwort Funktionen befindet sich ein Nash Gleichgewicht, da hier alle Aktionen, die an den Koordinatenachsen abgelesen werden, Beste-Antworten von  $b_1$  bzw. von  $b_2$  sind. Dies entspricht dem Fall, bei dem alle Komponenten der Menge des Aktionsprofils durch einen Stern markiert sind.

Im Schnittpunkt gilt sowohl

$$a_1 = \frac{1}{2}(c + a_2) \tag{5}$$

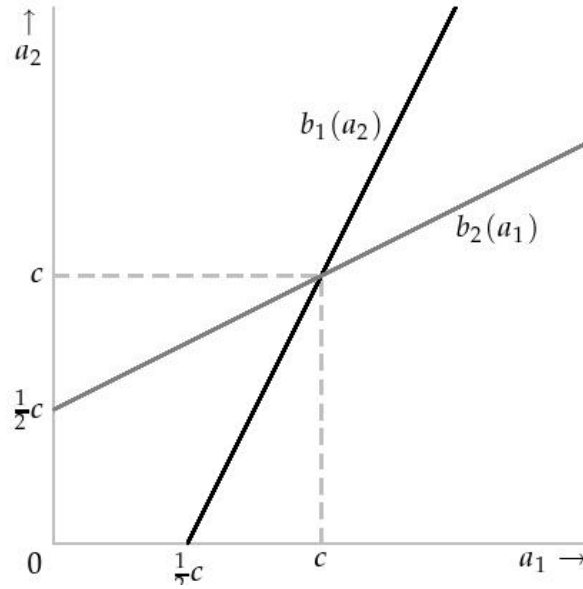


Abbildung 1. Synergetische Beziehung zweier Individuen

als auch

$$a_2 = \frac{1}{2}(c + a_1) \quad (6)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt genau ein Nash Gleichgewicht  $(a_1, a_2) = (c, c)$

Bei manchen Spielen sind die Beste-Antwort Funktionen keine Geraden sondern Kurven, die stellenweise nicht definiert sein können, oder die Funktion besitzt Stellen, bei denen es gleich mehrere Beste-Antworten gibt, in diesem Fall besitzt die Funktion 'dicke' Stellen (Siehe Abbildung 2: Graue Fläche beschreibt mehrere Beste-Antworten auf eine bestimmte Aktion)

In Abbildung 2 sind zu einem Spiel komplexe Beste-Antwort-Funktionen zu sehen. Die graue Fläche markiert einen Bereich, in dem es mehrere Beste-Antworten zu einer bestimmten Aktion gibt. Dadurch das es hier sehr viele Schnittpunkte zwischen den Funktionen gibt ( $B_2$  schneidet graue Fläche), gibt es also auch mehrere Nash Gleichgewichte (Elemente der folgenden Menge):

$$\{(a_1^*, a_2^*), (a_1^{**}, a_2^{**}), \dots, (a_1^{***}, a_2^{***})\}$$

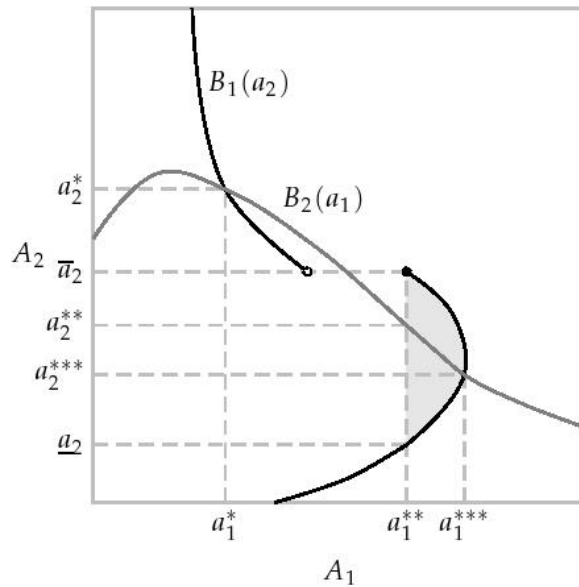


Abbildung 2. komplexe Beste-Antwort Funktionen

## 5 Besondere Nash Gleichgewichte

### 5.1 Beispiel: Fußballspiel

Beim Fußballspiel stehen jeder Mannschaft zwei Aktionsalternativen zur Auswahl. Eine Mannschaft kann 'offensiv' oder 'defensiv' eingestellt sein. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass durch die Wahl einer dieser Aktionen das Ergebnis feststeht. Benutzen beide Mannschaften im Spiel die gleichen Aktionen, z.B. (offensiv, offensiv), so endet das Spiel unentschieden und jede Mannschaft erhält einen Punkt. Spielt die eine Mannschaft 'offensiv' und die andere Mannschaft 'defensiv' so erhält die offensiv spielende Mannschaft 3 Punkte, während die defensiv spielende Mannschaft 0 Punkte erhält.

#### Fußballspiel:

| (Mannschaft 1, Mannschaft 2) | Defensiv | Offensiv |
|------------------------------|----------|----------|
| Defensiv                     | 1,1      | 0,3      |
| Offensiv                     | 3,0      | 1,1      |

Für Mannschaft 1 ist es besser 'offensiv' zu wählen: Wenn Mannschaft 2 'defensiv' wählt, dann bekommt Mannschaft 1 drei Punkte statt einen Punkt bei der Auswahl der Aktion 'defensiv'. Spielt Mannschaft 2 auch 'offensiv', so kann Mannschaft 1 wenigstens einen Punkt retten. Beim Aktionsprofil (defensiv, offensiv) bekommt Mannschaft 1 keinen Punkt. Egal was Mannschaft 2 wählt: Für Mannschaft 1 ist es in jedem Fall

besser, 'offensiv' zu wählen. Die Aktion 'offensiv' ist für Mannschaft 1 streng dominant gegenüber der Aktionsalternative 'defensiv'.

**Definition 7.** (*Strenge Dominierung*) In einem strategischen Spiel mit ordinalen Präferenzen, ist die Aktion  $a_i''$  eines Spielers  $i$  gegenüber der Aktion  $a_i'$  streng dominierend, wenn

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \quad (7)$$

für jede Liste  $a_{-i}$  der Aktionen der anderen Spieler gilt, wobei  $u_i$  eine Auszahlungsfunktion ist, die die Präferenzen von Spieler  $i$  repräsentiert. Wir sagen, dass die Aktion  $a_i'$  streng dominiert wird.

Im Fußballspiel bedeutet das Folgendes: Jeder Mannschaft steht eine Aktionsmenge  $A = \{\text{defensiv, offensiv}\}$  zu Verfügung. Für Mannschaft 1 ist genau die Aktion  $a \in A$  streng dominant gegenüber jeder anderen Aktion, die gegenüber jeder Aktion von Mannschaft 2 besser ist als alle anderen. Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt (die Auszahlungen der Auszahlungsmatrix sind an der Diagonalen symmetrisch) gilt das gleiche Argument auch für Mannschaft 2. Eine Möglichkeit, die häufig zur Vereinfachung komplexer Spiele hilfreich ist, ist die Eliminierung streng dominierter Aktion. Die Elimination streng dominierter Aktionen beim Fußballspiel liefert eine zu einem Feld zusammengeschrumpfte Auszahlungsmatrix.

**Fußballspiel:**

|                              |          |
|------------------------------|----------|
| (Mannschaft 1, Mannschaft 2) | Offensiv |
| Offensiv                     | 1,1      |

Analog zum Fußballspiel dominiert beim Gefangenproblem die Aktion 'Mitspieler beschuldigen' streng die Aktion 'Schweigen'. Unabhängig davon, was die Aktion des Mitspielers ist, ein Spieler präferiert immer 'Mitspieler beschuldigen' gegenüber 'Schweigen'.

**Definition 8.** (*Schwache Dominierung*) In einem strategischen Spiel mit ordinalen Präferenzen, dominiert die Aktion  $a_i''$  von Spieler  $i$  schwach die Aktion  $a_i'$ , wenn

$$u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}) \quad (8)$$

für jede Liste  $a_{-i}$  der Aktionen der anderen Spieler und

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \quad (9)$$

für einige Listen  $a_{-i}$  der Aktionen der anderen Spieler.

**Definition 9.** Ein Aktionsprofil  $a^*$  ist ein striktes Nash Gleichgewicht, wenn für jeden Spieler  $i$   $u_i(a_i^*) > u_i(a_i, a_{-i}^*)$  für jede Aktion  $a_i \neq a_i^*$  eines Spielers  $i$  ist.

**Definition 10.** (*Symmetrisches Nash Gleichgewicht*) Ein Aktionsprofil  $a^*$  in einem strategischen Spiel mit ordinalen Präferenzen, in dem jeder Spieler die gleiche Menge an Aktionen besitzt ist ein symmetrisches Nash Gleichgewicht, wenn es ein Nash Gleichgewicht ist und das Aktionsprofil  $a_i^* = a_j^*$  für alle Spieler  $i, j$  gilt.

Ein Spiel sei durch die folgende Auszahlungsmatrix repräsentiert.

**Beispiel 2:**

| (Spieler 1, Spieler 2) | X   | Y   |
|------------------------|-----|-----|
| X                      | 5,5 | 1,1 |
| Y                      | 1,1 | 1,1 |

Die drei Eigenschaften 'schwache Dominierung', 'striktes Nash Gleichgewicht' und 'symmetrisches Nash Gleichgewicht' kommen bei diesem Spiel (Beispiel 2) vor:

- (X,X) ist ein symmetrisches Nash Gleichgewicht
- Die Aktion X ist gegenüber der Aktion Y schwach dominant
- (X,X) ist ein striktes Nash Gleichgewicht

## 6 Zusammenfassung

Mit den hier aufgelisteten Definitionen und der Methode, bei der mit Hilfe von Beste-Antwort-Funktionen, Nash Gleichgewichte berechnet werden können, besitzt der Leser das nötige Rüstzeug, um bei statischen Spielen für die Spieler optimale Aktionen herzuleiten, sowie die Berechnung durch Ausnutzung von dominierten Aktionen und Symmetrien etwas effizienter zu machen.

## Literatur

- Martin J. Osborne: An Introduction to Game Theory
- <http://webber.physik.uni-freiburg.de/hon/vorlss02/Literatur/GameTheory/GrundlagenSpieltheorie.pdf> - Zuletzt aufgerufen am 2.6.06
- <http://www.sulb.uni-saarland.de/bibliothek/profil/ausstellung/alt/aus-04/index-nobel-rs.html> - Zuletzt aufgerufen am 2.6.06
- [http://www5.in.tum.de/lehre/seminare/math\\_nszeit/SS03/vortraege/nash/biographie.htm](http://www5.in.tum.de/lehre/seminare/math_nszeit/SS03/vortraege/nash/biographie.htm) - Zuletzt aufgerufen am 2.6.06
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Nash-Gleichgewicht> - Zuletzt aufgerufen am 2.6.06
- [http://de.wikipedia.org/wiki/John\\_F.\\_Nash](http://de.wikipedia.org/wiki/John_F._Nash) - Zuletzt aufgerufen am 5.6.06