

Hauptseminar: Spiele in der Informatik
Thema: Null-Summen-Spiele

Thomas Steinmetz

26. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	1
2.1	Eigenschaften und Darstellung von Spielen	1
2.2	Strategien	2
2.3	Equilibrium	2
2.4	Normalform	3
3	Matrixspiele mit Sattelpunkten	3
4	Matrixspiele ohne Sattelpunkte	5
4.1	Gemischte Strategien	5
4.2	Dominierte Reihen und Spalten	8
5	Lösen von Matrixspielen	9
5.1	Spiele mit Sattelpunkten	9
5.2	Symmetrische Spiele	9
5.3	Kleine Spiele	10

1 Einleitung

In der Spieltheorie werden Situationen, in denen der Gesamtgewinn aller Akteure gleich dem Gesamtverlust aller Akteure ist, als *Nullsummenspiele* bezeichnet. Ein gutes Beispiel hierfür ist Poker: hier erhält der Sieger den kompletten Pott, in den vorher alle Mitspieler einzahlen mussten, d.h. der Sieger gewinnt genau soviel, wie die anderen Spieler verlieren.

In dieser Arbeit wird der Spezialfall *Zwei-Personen-Nullsummenspiel* behandelt, bei dem nur zwei Akteure an einem Spiel teilnehmen. Sie basiert inhaltlich größtenteils auf dem Buch „Introduction to Game Theory“ von Peter Morris [1], welches daher im folgenden nicht mehr extra angegeben wird. Bei Verwendung anderer Quellen werden diese separat angegeben.

2 Grundlagen

2.1 Eigenschaften und Darstellung von Spielen

Spiele erfüllen hier folgende Bedingungen: es gibt nur eine endliche Anzahl von Spielern, jeder der Spieler kennt die Spielregeln, an bestimmten Punkten im Spiel hat ein Spieler verschiedene (aber endlich viele) Züge zur Auswahl und das Spiel endet nach einer endlichen Anzahl von Zügen. Endet das Spiel, so erhält jeder Spieler eine Auszahlung, die allerdings auch negativ sein kann. Möglich aber nicht notwendig ist, dass das Spiel von *vollständiger Information* (engl.: perfect information) ist. D.h. ein Spieler kennt den gesamten bisherigen Ablauf des Spiels und weiß somit immer genau, an welchem Punkt im Spiel er sich gerade befindet. Ein Beispiel für ein solches Spiel wäre Schach.

Es ist leicht zu sehen, dass sich derartige Spiele jeweils als Spielbaum darstellen lassen. Jeder Knoten (inkl. der Wurzel), der nicht Endknoten ist, ist einem Spieler zugeordnet. Dieser Spieler hat an dieser Stelle die Wahl zwischen verschiedenen Zügen, indem er ein Kind dieses Knotens auswählt. In einem Spiel beginnt folglich der Spieler, dem der Wurzelknoten gehört. Darauf folgt der Spieler, dem der ausgewählte Kindknoten gehört usw. bis ein Endknoten erreicht ist. In den Endknoten stehen die Auszahlungen für die Spieler.

Als *Informationsmenge* (engl.: information set) bezeichnen wir eine Menge von Knoten, für die der Spieler weiß, dass er sich in einem dieser Knoten befindet, aber nicht in welchem. Ist das Spiel von vollständiger Information, so befindet sich in jeder Informationsmenge genau ein Knoten.

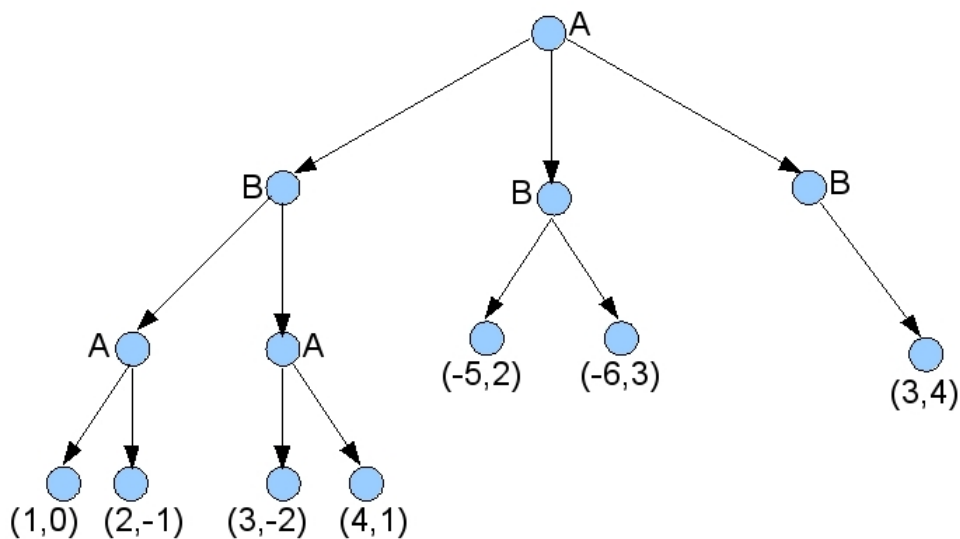


Abbildung 1: Spielbaum, [1] S.18

2.2 Strategien

Nun wollen wir den Begriff *Strategie* für einen Spieler definieren.

Eine Möglichkeit wäre die *Wahlfunktion* (engl.: choice function), die jedem Knoten, der zu diesem Spieler gehört, genau einen seiner Nachfolgeknoten zuordnet. Somit ist genau vorgegeben, welchen Zug der Spieler an diesem Punkt des Spiels wählt. Insgesamt hat ein Spieler also $\prod_{i=1}^k C(x_i)$ verschiedene Wahlfunktionen, wobei x_i ein zu diesem Spieler gehörender Knoten und $C(x_i)$ die Anzahl der von x_i ausgehenden Kanten ist. Allerdings ist eine Wahlfunktion keine zufriedenstellende Definition für eine Strategie. Ein Problem ist, dass eine Strategie die Informationsmengen berücksichtigen muss, d.h. eine Strategie muss für jeden Knoten in einer Informationsmenge denselben Zug auswählen, z.B. - wenn wir uns einen Spielbaum vorstellen - für jeden dieser Knoten den linken Pfad zu einem Kind auswählen. Somit ist nicht jede mögliche Wahlfunktion eine gültige Strategie. Ein weiteres Problem ist, dass man in Wahlfunktionen für Knoten eine Nachfolgefunktion definiert, für die es eigentlich unnötig wäre, da sie - aufgrund der vorherigen Züge des selben Spielers - nie erreicht werden können. Somit würden insgesamt mehr Strategien definiert als eigentlich notwendig. So müsste im Beispiel in Abb.1 eine Strategie für Spieler A, die von der Wurzel aus dem mittleren oder dem rechten Pfad folgt, keine Züge für die zu Spieler A gehörenden Knoten, die sich im linken Unterbaum befinden, festlegen.

Letzteres Problem lässt sich umgehen, indem wir einen *Wahlteilbaum* (engl.: choice subtree) als eine Strategie auffassen. Ein Wahlteilbaum für einen Spieler ist ein Teilbaum, der sich aus einem gegebenen Spielbaum folgendermaßen ergibt (beginnend bei der Wurzel): gehört ein Knoten zu diesem Spieler, so wird nur ein Nachfolgeknoten übernommen, die restlichen Unterbäume werden entfernt. Gehört ein Knoten zu einem anderen Spieler, so werden dieser Knoten und all seine Kinder übernommen. Die Anzahl der möglichen Wahlteilbäume für einen Spieler ist folglich kleiner als die Anzahl der möglichen Wahlfunktionen, da Wahlmöglichkeiten an Knoten, die nicht in diesem Teilbaum enthalten sind, für die Gesamtanzahl keine Rolle spielen.

Im Beispiel in Abb.1 hat Spieler A zwölf mögliche Wahlfunktionen ($2 \times 2 \times 3$), aber nur sechs mögliche Wahlteilbäume. Der mittlere und der rechte Unterbaum der Wurzel bilden jeweils einen Wahlteilbaum für A. Der linke Unterbaum bietet vier mögliche Wahlteilbäume - jede mögliche Kombination, die sich mit den zwei zu A gehörenden Knoten in diesem Unterbaum ergeben. Ebenso hat Spieler B vier mögliche Wahlfunktionen und vier mögliche Wahlteilbäume.

Doch auch ein Wahlteilbaum ist keine ausreichende Definition für eine Strategie, da auch hier das Problem besteht, dass nicht jeder Wahlteilbaum die Informationsmengen berücksichtigt. Um dieses Problem zu umgehen, bilden wir nun für jeden Spieler eine Menge seiner Wahlteilbäume, welche die Informationsmengen berücksichtigen. Diese Menge nennen wir *Strategiemenge* (engl.: strategy set) und jedes Element dieser Menge nennen wir eine *Strategie*.

2.3 Equilibrium

Als *Equilibrium* bezeichnen wir im Grunde ein strategisches Gleichgewicht.

Betrachten wir ein Spiel mit n Spielern, wobei $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ die Strategiemengen für die jeweiligen Spieler sind. Ein N -Tupel (S_i^*) mit $S_i^* \in \Sigma_i$ (für $1 \leq i \leq n$) ist ein Equilibrium, wenn für jedes i und jedes $S_i \in \Sigma_i$ gilt:

$$\pi_i(S_1^*, \dots, S_i, \dots, S_n^*) \leq \pi_i(S_1^*, \dots, S_i^*, \dots, S_n^*), \text{ wobei } \pi_i \text{ die erwartete Auszahlung für Spieler } P_i \text{ ist.}$$

Das heißt, wenn alle Spieler nach ihrer Strategie S_i^* spielen, so sollte jeder Spieler bei dieser Strategie bleiben, da er sonst bei Abweichung hiervon am Ende schlechter dasteht.

Ein bekanntes Beispiel in diesem Kontext ist das Gefangenendilemma[3]. Zwei Gefangene, die natürlich keinen Kontakt zueinander mehr haben dürfen, werden beschuldigt, gemeinsam eine Straftat begangen zu haben. Jeder der Gefangenen hat folgende Strategien: entweder er leugnet (L) oder er gesteht (G) die Tat. Jedem der beiden wird folgender Deal angeboten: wer gesteht und den anderen Gefangenen beschuldigt, der wird aufgrund einer Kronzeugenregelung

nicht verurteilt, sofern der andere Gefangene die Tat leugnet. Gesteht der andere, so erhält er 3 Jahre Haft. Wenn der andere Gefangene gesteht, er selbst aber leugnet, so erhält er 5 Jahre Haft. Leugnen beide, so erhält jeder 1 Jahr Haft, da ihnen nur ein geringes Vergehen nachgewiesen werden kann. Die Auszahlungen (die negativ sind, da die Gefangenen die Haft ja schlecht bewerten) für die Spieler sind für die möglichen Strategiepaare folgende:

$$(L,L) = (-1,-1), (G,G) = (-3,-3), (L,G) = (-5,0), (G,L) = (0,-5)$$

Wir sehen leicht, dass das Paar (G,G) ein Equilibrium ist. Derjenige Spieler, der von diesem Strategiepaar (G,G) abweicht, also von Strategie G zu Strategie L wechselt, fährt schlecht damit. Ein solches Paar nennen wir bei Zwei-Spieler-Spielen *Gleichgewichtspaar*.

2.4 Normalform

Betrachten wir nun ein Spiel mit zwei Spielern. Wir haben bereits gesehen, dass wir ein solches Spiel als Spielbaum darstellen können. Alternativ können wir dasselbe Spiel auch in Form von zwei Matrizen darstellen. Hat der erste Spieler m Strategien und der zweite Spieler n Strategien, dann können wir zwei $m \times n$ -Matrizen erstellen, so dass die m Reihen mit den m Strategien des ersten Spielers identifiziert werden, ebenso die n Spalten mit den n Strategien des zweiten Spielers. In der Matrix für den ersten Spieler kann nun für jedes Strategiepaar die Auszahlung für diesen Spieler eingetragen werden. Ebenso wird bei der Matrix für den zweiten Spieler verfahren.

Im folgenden sei das betrachtete Spiel ein Nullsummenspiel für zwei Spieler. Wir wissen, dass der Gewinn des einen Spielers exakt dem Verlust des anderen Spielers entspricht. Darum werden diese Spiele auch Spiele von vollständiger Konkurrenz genannt, da es für einen Spieler sinnlos ist mit dem anderen Spieler zu verhandeln.[2] Da die beiden Matrizen für diese Spieler das Negative voneinander sind, genügt uns somit bereits eine einzige $m \times n$ -Matrix, um die Auszahlungen für die beiden Spieler festzulegen. Spielt der „Reihenspieler“ Strategie i und der „Spaltenspieler“ Strategie j , so erhält der „Reihenspieler“ den Matrixeintrag m_{ij} als Auszahlung, der „Spaltenspieler“ entsprechend $-m_{ij}$. Im folgenden sei der „Reihenspieler“ mit MAX bezeichnet, da er große Zahlen bevorzugt, der „Spaltenspieler“ mit MIN, da er entsprechend kleine Zahlen bevorzugt. Das Spiel bezeichnen wir dann als *Matrixspiel*.

3 Matrixspiele mit Sattelpunkten

Die in Abschnitt 2.3 erwähnten Gleichgewichtspaare lassen sich leicht auf ein Matrixspiel übertragen. Ist (p, q) ein solches Paar, dann gilt $m_{iq} \leq m_{pq}$ für alle i und $m_{pj} \geq m_{pq}$ für alle j . Wäre dem nicht so, dann würde etwa $m_{iq} > m_{pq}$ für mindestens ein i gelten. So könnte Spieler MAX dadurch profitieren, dass er von seiner Strategie p abweicht und somit wäre (p, q) kein Equilibrium. Wir definieren nun folgendes:

Definition 3.1: Ein Eintrag m_{pq} ist ein Sattelpunkt in der Matrix M , wenn er gleichzeitig ein Minimum in seiner Reihe und ein Maximum in seiner Spalte ist.

Zusammen mit obigen Ungleichungen ergibt sich: m_{pq} ist ein Sattelpunkt genau dann, wenn (p, q) ein Equilibrium bzw. Gleichgewichtspaar ist. Ein Beispiel für eine Matrix mit Sattelpunkten wäre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.1

Hier sind unter anderem die Einträge m_{12} und m_{33} Sattelpunkte.

Es kann gezeigt werden, dass das Anspielen eines Sattelpunktes eine zufriedenstellende Lösung für ein Matrixspiel darstellt. Betrachten wir zunächst Spieler MAX. Dieser kann annehmen, dass Spieler MIN versuchen wird, seine eigene Auszahlung möglichst zu maximieren. Bei einem Nullsummenspiel bedeutet dies, dass dadurch gleichzeitig die Auszahlung von MAX minimiert wird. MAX sollte daher so spielen, dass die kleinstmögliche Auszahlung maximal wird. MIN wird seine Strategie analog ausrichten. Wir können also sagen:

Definition 3.2: Sei M ein $m \times n$ -Matrixspiel. Die Werte für den „Reihenspieler“ MAX (r) und den „Spaltenspieler“ MIN (c) sind

$$u_r(M) = \max_i \min_j m_{ij}$$

und

$$u_c(M) = \min_j \max_i m_{ij}.$$

Dabei ist $u_r(M)$ der Betrag den Spieler MAX mindestens erhält, wenn er die Strategie k , die das Maximum von $u_r(M)$ in der Definition darstellt, anwendet. So gilt also:

$$\min_j m_{kj} = u_r(M).$$

Für Spieler MIN gilt in ähnlicher Weise, wobei l die Strategie ist, die MIN seinen Höchstverlust (da er ja das Negative des Wertes $u_c(M)$ erhält) sichert:

$$\max_i m_{il} = u_c(M).$$

In Beispiel 3.1 ist dieser Betrag für beide Spieler 0.

Wir wissen, dass wir uns in einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel befinden, in dem der Gewinn des einen Spielers den Verlust des anderen Spielers darstellt. Daher erwarten wir, dass der Betrag $u_r(M)$ gleich dem Betrag $u_c(M)$ ist. Um dies zu zeigen benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.1: Für jede Matrix M gilt: $u_r(M) \leq u_c(M)$.

Beweis zu Lemma 3.1: Für jedes i und jedes l gilt:

$$\min_j m_{ij} \leq m_{il}.$$

Nun maximieren wir beide Seiten über i und erhalten:

$$u_r(M) = \max_i \min_j m_{ij} \leq \max_i m_{il}, \text{ für jedes } l.$$

Also gilt auch

$$u_r(M) \leq \min_l \max_i m_{il} = u_c(M).$$

□

Theorem 3.1: Hat ein Matrixspiel M einen Sattelpunkt m_{pq} , dann gilt:

$$u_r(M) = u_c(M) = m_{pq}.$$

Beweis zu Theorem 3.1: Da q für MIN die Strategie ist, mit der er für sich das beste Ergebnis erzielen will und der Wert m_{pq} das Minimum in der Reihe p darstellt, gilt

$$\min_j m_{pj} = m_{pq},$$

und somit stellt m_{pq} für den Betrag $u_r(M)$ für MAX eine Untergrenze dar, es gilt also $u_r(M) \geq m_{pq}$. Genauso gilt, da p für MAX die Strategie ist, mit der er für sich das beste Ergebnis erzielen will und der Wert m_{pq} das Maximum in der Spalte q darstellt

$$\max_i m_{iq} = m_{pq},$$

und somit stellt m_{pq} für den Verlust $u_c(M)$ für MIN eine Obergrenze dar, es gilt also $u_c(M) \leq m_{pq}$. Zusammen erhalten wir

$$u_c(M) \leq m_{pq} \leq u_r(M).$$

Aufgrund von Lemma 3.1 gilt allerdings

$$u_r(M) \leq u_c(M),$$

und somit muss gelten

$$u_r(M) = u_c(M).$$

□

Sei nun M eine Matrix mit Sattelpunkt. MAX wähle Reihe i und MIN Spalte j aus. Enthält Reihe i einen Sattelpunkt m_{il} , so gilt

$$m_{ij} \geq m_{il} = u_r(M) = u_c(M).$$

Enthält Reihe i keinen Sattelpunkt, aber Spalte j den Sattelpunkt m_{kj} , dann gilt

$$m_{ij} \leq m_{kj} = u_r(M) = u_c(M).$$

MAX ist also gut beraten eine Reihe auszuwählen, die einen Sattelpunkt enthält, um sich den Mindestbetrag $u_r(M)$ zu sichern. Tut er dies nicht, so kann MIN auf jeden Fall eine Spalte auswählen, so dass die Auszahlung für MAX kleiner als $u_r(M)$ wird. Gleiches gilt für MIN, der eine Spalte auswählen sollte, die einen Sattelpunkt enthält, um sich seinen Höchstverlust zu sichern. Somit ist die beste Strategie für beide Spieler, eine Reihe bzw. Spalte auszuwählen, die einen Sattelpunkt enthält. Wir können sogar folgende Aussage treffen (ohne Beweis):

Theorem 3.2: Sind m_{kl} und m_{pq} Sattelpunkte, so sind auch m_{kq} und m_{pl} Sattelpunkte, und es gilt $m_{kl} = m_{pq} = m_{kq} = m_{pl}$.

Es genügt also bereits, dass MAX bzw. MIN jeweils eine beliebige Reihe bzw. Spalte, die einen Sattelpunkt enthält, auswählen.

4 Matrixspiele ohne Sattelpunkte

4.1 Gemischte Strategien

Betrachten wir nun Matrixspiele ohne Sattelpunkte. Wählt in einem solchen Spiel MAX eine feste Strategie, so kann sich MIN darauf einstellen und sich selbst einen möglichst großen Gewinn sichern. Dasselbe gilt für den Fall, wenn MAX seine Strategie nach einem festen Muster variiert. Wählt MIN eine feste Strategie, so gilt natürlich dasselbe. Jeder der beiden Spieler sollte also zu Beginn eines Spiels die Wahl seiner Strategie dem Zufall überlassen. Dabei wird jeder Strategie eines Spielers eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet, mit der sie zu Beginn eines Spiels ausgewählt wird. Hat MAX m Strategien, so hat er ein m-Tupel \vec{p} von Wahrscheinlichkeiten. Die Summe

dieser m Wahrscheinlichkeiten muss natürlich eins ergeben. Spieler MIN mit n Strategien hat ein n -Tupel \vec{q} von Wahrscheinlichkeiten, die in der Summe ebenfalls eins ergeben müssen. Ist in einem Tupel eine dieser Wahrscheinlichkeiten gleich eins, d.h. MAX wählt immer die gleiche Reihe oder MIN immer die gleiche Spalte aus, so nennen wir diese *gemischte Strategie* (engl.: mixed strategy) *reine Strategie* (engl.: pure strategy). Dies war etwa bei Matrixspielen mit Sattelpunkten der Fall, in denen jeder Spieler nur einen Sattelpunkt anzuspüren brauchte. Eine gemischte Strategie eines Spielers ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge seiner reinen Strategien. [2] Das Ziel eines Spielers bei einem Matrixspiel ohne Sattelpunkt ist es, die Wahrscheinlichkeiten so zu verteilen, dass der eigene Gewinn möglichst groß wird. Der erwartete Wert für den Fall, dass beide Spieler mit einer gemischten Strategie spielen, bezeichnen wir mit $E(\vec{p}, \vec{q})$. Dies stellt einen Mittelwert dar, der erwartet wird, wenn ein Spiel öfters durchgeführt wird.

Nun spiele MIN nach einer reinen Strategie j und MAX nach der gemischten Strategie \vec{p} . Als erwarteten Wert erhalten wir: $E(\vec{p}, j) = \sum_{i=1}^m p_i m_{ij}$, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit ist, dass MAX Strategie i wählt. Spielt nun MIN ebenfalls nach einer gemischten Strategie, so erhalten wir für den erwarteten Wert:

$$E(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m p_i m_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_i q_j m_{ij}$$

Beispiel 4.1:

Sei $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ unsere Matrix ohne Sattelpunkt und die gemischten Strategien $\vec{p} = (1/2, 1/2)$ für MAX und $\vec{q} = (2/3, 1/3)$ für MIN. Für den erwarteten Wert erhalten wir:

$$E((1/2, 1/2), (2/3, 1/3)) = (1/2)(2/3) - 3(1/2)(1/3) - 2(1/2)(2/3) + (1/2)(1/3) = -2/3.$$

Auch bei gemischten Strategien können wir annehmen, dass jeder der beiden Spieler bestrebt ist, sich selbst den größtmöglichen Gewinn zu sichern. Es gilt daher folgende Definition:

Definition 4.1: Sei M ein $m \times n$ -Matrixspiel. Für MAX gilt

$$v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}).$$

Für MIN gilt

$$v_c(M) = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} E(\vec{p}, \vec{q}).$$

Dabei ist $v_r(M)$ der Betrag, den MAX garantiert im Schnitt gewinnt, $v_c(M)$ entsprechend der Betrag, den MIN im Schnitt verliert.

Wir gehen nun davon aus, dass eine gemischte Strategie \vec{r} für MAX existiert, so dass gilt

$$v_r(M) = \min_{\vec{q}} E(\vec{r}, \vec{q}).$$

Ebenso gehen wir davon aus, dass eine gemischte Strategie \vec{s} für MIN existiert, so dass gilt

$$v_c(M) = \max_{\vec{p}} E(\vec{p}, \vec{s}).$$

Derartige Strategien \vec{r} und \vec{s} nennen wir *optimale gemischte Strategien*. Spielt etwa MAX nach einer optimalen gemischten Strategie, so gewinnt er im Schnitt mindestens $v_r(M)$, unabhängig davon, welche Strategie MIN wählt. Wie schon bei Matrixspielen mit Sattelpunkten können wir annehmen, dass die beiden Beträge $v_c(M)$ und $v_r(M)$ gleich sind, da es sich auch hier um Nullsummenspiele handelt. Hinführend treffen wir folgende Aussage:

Theorem 4.1: Sei M eine $m \times n$ -Matrix. \vec{r} sei eine optimale gemischte Strategie für MAX und \vec{s} entsprechend für MIN. Dann gilt

$$v_r(M) \leq E(\vec{r}, \vec{s}) \leq v_c(M).$$

Beweis zu Theorem 4.1: \vec{r} ist eine gemischte Strategie für MAX, also gilt

$$v_c(M) = \max_{\vec{p}} E(\vec{p}, \vec{s}) \geq E(\vec{r}, \vec{s}).$$

Ebenso ist \vec{s} eine gemischte Strategie für MIN, also gilt

$$v_r(M) = \min_{\vec{q}} E(\vec{r}, \vec{q}) \leq E(\vec{r}, \vec{s}).$$

Und damit haben wir gezeigt, dass $v_r(M) \leq E(\vec{r}, \vec{s}) \leq v_c(M)$ gilt.

□

Wir wissen nun insbesondere auch, dass $v_r(M) \leq v_c(M)$ gilt. Weiter sehen wir aus diesem Beweis, dass MAX mindestens den Betrag $v_r(M)$ gewinnt, wenn er eine optimale gemischte Strategie wählt. Spielt MAX allerdings nicht nach einer solchen Strategie, so gewinnt er im Schnitt weniger als den Betrag $v_r(M)$. Ebenso verliert MIN, falls er nicht nach einer optimalen gemischten Strategie spielt, im Schnitt auf jeden Fall mehr als den Betrag $v_c(M)$. Das Paar zweier optimaler gemischten Strategien bildet folglich ein Equilibrium. Analog zu Theorem 3.2 kann gezeigt werden, dass es (sollte es mehrere optimale gemischte Strategien für einen Spieler geben) egal ist, welche optimale gemischte Strategie er wählt. (ohne Beweis)

Im folgenden nehmen wir an, dass das Minimax-Theorem, das besagt, dass $v_r(M) = v_c(M)$ gilt, bereits bewiesen sei. Damit gilt im folgenden

$$v_r(M) = E(\vec{r}, \vec{s}) = v_c(M).$$

Wir können sogar weiter annehmen, dass für *jede* Matrix $v_r(M) = v_c(M)$ gilt. Mit diesem Wissen können wir nun definieren, was überhaupt eine *Lösung* für ein Matrixspiel darstellt:

Definition 4.2: Eine Lösung für ein Matrixspiel besteht aus einer optimalen gemischten Strategie für MAX, einer optimalen gemischten Strategie für MIN und dem so genannten Wert des Spiels $v(M)$, für den gilt: $v(M) = v_r(M) = v_c(M)$.

Die Schritte, $v_r(M)$ und $v_c(M)$ zu berechnen, können mit folgendem Theorem vereinfacht werden.

Theorem 4.2: Sei M eine $m \times n$ -Matrix und i bzw. j reine Strategien für MAX bzw. MIN. Dann gilt

$$v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_j E(\vec{p}, j)$$

und

$$v_c(M) = \min_{\vec{q}} \max_i E(i, \vec{q}).$$

Beweis zu Theorem 4.2: Wir wollen zeigen, dass $\max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{\vec{p}} \min_j E(\vec{p}, j)$ gilt. Reine Strategien sind nur eine Teilmenge der gemischten Strategien, also gilt

$$\min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}) \leq \min_j E(\vec{p}, j).$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass ebenso $\min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}) \geq \min_j E(\vec{p}, j)$ gilt. Im folgenden gelte für die reine Strategie l

$$E(\vec{p}, l) = \min_j E(\vec{p}, j).$$

Weiter gilt für alle \vec{q}

$$E(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{j=1}^n q_j E(\vec{p}, j) \geq E(\vec{p}, l).$$

Also gilt

$$\min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}) \geq \min_j E(\vec{p}, j).$$

Mit diesen beiden Ungleichungen erhalten wir (nach Maximierung über \vec{p}) wie gefordert

$$\max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{\vec{p}} \min_j E(\vec{p}, j).$$

Der Beweis für $v_c(M)$ verläuft analog.

□

Die gemischte Strategie \vec{r} für MAX ist somit genau dann optimal, wenn $v_r(M) = \min_j E(\vec{r}, j)$ gilt. Ebenso ist \vec{s} für MIN genau dann eine optimale gemischte Strategie, wenn $v_c(M) = \max_i E(i, \vec{s})$ gilt. Wir müssen also nicht alle gemischten Strategien betrachten, um das Minimum bzw. das Maximum dieser Werte zu finden, sondern es genügt schon die Betrachtung der reinen Strategien.

4.2 Dominierte Reihen und Spalten

Es gibt nun Fälle, in denen reine Strategien in einer optimalen gemischten Strategie mit der Wahrscheinlichkeit null angewandt werden. Formal können wir sagen, wenn $m_{ij} \geq m_{kj}$ für alle j gilt, so dominiert Reihe i Reihe k . Es erscheint logisch, dass Spieler MAX eine dominierte Reihe meidet. Ebenso meidet MIN dominierte Spalten, wobei eine Spalte l dominiert wird, wenn eine Spalte j existiert für die $m_{ij} \leq m_{il}$ für alle i gilt.

Bei der Suche nach einer Lösung können wir, zum Vereinfachen, derartige Reihen und Spalten aus der Matrix eliminieren, da diese Reihen und Spalten bei einer optimalen gemischten Strategie sowieso mit Wahrscheinlichkeit null angespielt werden.

Beispiel 4.2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass Reihe 2 Reihe 1 dominiert, diese streichen wir und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier dominiert Spalte 2 Spalte 3. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix kann nun einfacher gelöst werden.

5 Lösen von Matrixspielen

Mit dem bisher Behandelten ist es nicht möglich, jedes beliebige Matrixspiel zu lösen. Für einige wenige, spezielle Fälle können wir allerdings schon Lösungen finden. Zum Abschluss betrachten wir einige dieser Spezialfälle.

5.1 Spiele mit Sattelpunkten

Wir haben bereits in Kapitel 3 erwähnt, dass das Anspielen eines Sattelpunktes eine zufriedenstellende Lösung für ein solches Spiel darstellt. Nun können wir formal beweisen, dass dies ebenfalls einer Lösung gemäß Definition 4.2 entspricht.

Behauptung: *Hat Matrix M einen Sattelpunkt m_{kl} , so gilt $v_r(M) = v_c(M) = m_{kl}$. k und l sind somit optimale gemischte Strategien.*

Beweis: Reine Strategien sind nur eine Teilmenge der gemischten Strategien, es gilt also

$$v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_j E(\vec{p}, j) \geq u_r(M),$$

ebenso können wir sagen, dass $v_c(M) \leq u_c(M)$ gilt.

Nach Theorem 3.1 gilt $u_r(M) = u_c(M)$ und nach Theorem 4.1 gilt $v_r(M) \leq v_c(M)$.

Folglich gilt:

$$v_r(M) = v_c(M) = u_r(M) = u_c(M) = m_{kl}.$$

Wir stellen nun fest, dass $\min_j E(k, j) = \min_j m_{kj} = m_{kl} = v_r(M)$ gilt, wenn k eine optimale Strategie ist. Der Beweis für l geht analog.

□

5.2 Symmetrische Spiele

Betrachten wir uns einen Spezialfall von Matrixspielen, die symmetrischen Spiele. Ein Spiel ist symmetrisch, wenn die Spieler ihre Rollen tauschen können, ohne dass sich die Anzahl ihrer reinen Strategien und ohne dass sich ihre optimale Strategie ändern. Beide Spieler haben folglich die gleiche Anzahl an reinen Strategien. In einer Matrix zu einem symmetrischen Spiel muss $m_{ji} = -m_{ij}$ gelten, d.h. tauschen MAX und MIN ihre Strategie, so tauschen sie auch ihre Auszahlungen.

Weiter gilt: Ist \vec{x} eine optimale gemischte Strategie für MIN, dann ist \vec{x} ebenso eine optimale gemischte Strategie für MAX. Der Wert eines symmetrischen Spiels beträgt null. Um ein symmetrisches Spiel lösen zu können, müssen wir wissen, dass (für eine $n \times n$ -Matrix) für alle j gilt

$$E(\vec{r}, j) = \sum_{i=1}^n r_i m_{ij} \geq 0, \quad (1)$$

wobei \vec{r} eine optimale gemischte Strategie für MAX ist. Obige Ungleichung gilt, da $v_r(M) = \min_j E(\vec{r}, j)$ gilt und der Wert des Spiels null sein muss. Auch gilt, ebenfalls weil der Wert des Spiels null sein muss, dass einige der Ungleichungen Gleichungen sein müssen. Weiter gilt die Gleichung

$$r_1 + \dots + r_n = 1. \quad (2)$$

Um eine Lösung zu finden gehen wir folgendermaßen vor: wir stellen die Ungleichungen gemäß (1) auf, fassen sie als Gleichungen auf und lösen diese zusammen mit (2).

Beispiel 5.1:

Ein Beispiel für ein symmetrisches Spiel ist „Stein-Schere-Papier“.

Die Matrix dazu sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um eine optimale gemischte Strategie zu berechnen stellen wir die Ungleichungen nach (1) auf und erhalten

$$\begin{aligned} -r_2 + r_3 &\geq 0 \\ r_1 - r_3 &\geq 0 \\ -r_1 + r_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fassen wir nun zwei der drei Ungleichungen als Gleichungen auf, so erhalten wir zusammen mit (2)

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= 1 \\ -r_2 + r_3 &= 0 \\ r_1 - r_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ergibt $r_1 = r_3$, $r_1 = r_2$, sowie $3r_1 = 1$. Somit ist die optimale gemischte Strategie für MAX und für MIN $(1/3, 1/3, 1/3)$. Es gilt $v_c(M) = v_r(M) = 0$, also haben wir eine Lösung für das Spiel gefunden.

Leider funktioniert dieser Lösungsansatz nicht bei allen symmetrischen Spielen.

5.3 Kleine Spiele

Auch kleine Spiele lassen sich auf einfache Art und Weise lösen. Betrachten wir uns die 2 x 2-Matrix aus Beispiel 4.2, die sich ergibt, wenn die dominierte Reihe und die dominierte Spalte entfernt werden. Diese Matrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass (wegen Theorem 4.2) $v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_j E(\vec{p}, j)$ gilt. Weiter gilt, dass \vec{p} hier von der Form $(p, 1-p)$ ist, für $0 \leq p \leq 1$. Wir schreiben $\pi_j(p) = E((p, 1-p), j)$ und erhalten für $j=1,2$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_1(p) &= p + 2(1-p) = 2-p \\ \pi_2(p) &= 2p - (1-p) = 3p-1 \end{aligned}$$

Wir haben also zwei Geraden. Die Lösung ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, da MIN das Minimum, das unterhalb des Schnittpunktes liegt, und MAX das Maximum dieses Minimums wählt. Dieses Maximum ist der Schnittpunkt. Beiden Formeln gleichgesetzt ergibt $p = 3/4$. \vec{p} ist somit $(3/4, 1/4)$ und $v_r(M) = 2 - 3/4 = 5/4$, wobei \vec{p} eine optimale gemischte Strategie für MAX ist.

Für MIN schreiben wir $\pi^i(q) = E(i, (q, 1-q))$ und erhalten für $i=1,2$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi^1(q) &= q + 2(1-q) = -q + 2 \\ \pi^2(q) &= 2q - (1-q) = 3q - 1 \end{aligned}$$

Diese beiden Formeln gleichgesetzt ergibt $q = 3/4$. $\vec{q} = (3/4, 1/4)$ ist eine optimale gemischte Strategie für MIN und es gilt $v_c(M) = -3/4 + 2 = 5/4$. Insbesondere ist $v_c(M) = 5/4 = v_r(M)$, somit haben wir das Spiel gelöst. Nehmen wir die in Beispiel 4.2 entfernten dominierten Reihen und Spalten, die mit der Wahrscheinlichkeit null belegt werden, hinzu, so ergibt sich für \vec{p} und \vec{q} : $\vec{p} = (0, 3/4, 1/4)$ und $\vec{q} = (3/4, 1/4, 0)$.

Literatur

- [1] Morris, Peter: „Introduction to game theory“ (1994), Verlag: Springer, Berlin
- [2] Lorenz, Franz: „Zwei-Personen-Nullsummenspiele“(2004), Technische Universität Kaiserslautern
www.mathematik.uni-kl.de/~krumke/Teaching/SS2004/proseminar/Data/ausarbeitung_lorenz.pdf
- [3] Thiemer, Andreas: „Oligopole - Lehrinheit zu VWL2“(2002), Fachhochschule Kiel
appl.wirtschaft.fh-kiel.de/lehre/thiemer/oligopole.ppt