Hauptseminar: Spiele in der Informatik

Auktionstheorie – Eine Einführung

Bernhard Schmitz

2. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Wohl spätestens seit der Entwicklung der Geldwirtschaft steht eine Person, die ein Objekt verkaufen möchte, vor zwei grundlegenden Problemen: Wem soll sie das Objekt verkaufen, und wieviel kann sie dafür verlangen.

Sie benötigt also einen Mechanismus, der ihr diese Fragen beantwortet. Die wohl älteste Form dieses Mechanismusses, die auch heute noch in Entwicklungsländern und z.B. auf Flohmärkten verbreitet ist, ist das Feilschen, bei dem der Verkäufer sich mit einem Interessenten in einer Verhandlung auf einen Preis einigt. Der Verkäufer hat hierbei natürlich keine Garantie, daß er auch tatsächlich demjenigen das Objekt überläßt, der am meisten dafür zu zahlen bereit ist. Wegen der Unhandlichkeit des Feilschens bei einer größeren Menge an Objekten, die an mehrere Personen verkauft werden sollen, entwickelte sich das Festpreissystem, wie man es aus den meisten Endkundengeschäften kennt. Dabei gibt der Verkäufer einen festen Preis vor und überläßt dem Kunden lediglich die Entscheidung, ob er es kauft oder nicht.

Dieser Mechanismus ist insbesondere dann impraktikabel, wenn es für den Verkäufer schwer ist, den tatsächlichen Wert des Objekts für den Käufer festzustellen. Daher entwickelten sich Auktionen, ein Mechanismus, bei dem alle Interessenten auf die eine oder andere Weise Signale geben, wieviel sie für das Objekt zu zahlen bereit sind, und der Verkäufer anhand dieser den Käufer auswählt.

Die ersten bezeugten Auktionen gab es um 500 v.Chr. in Babylon, wo Frauen im Heiratsalter an den Meistbietenden versteigert wurden. Nachdem im 19. Jahrhundert besonders englische Auktionshäuser für ihre Auktionen bekannt wurden, und Auktionsmechanismen in Fischmärkten u.Ä. verwendet wurden, stieg die Bedeutung von Auktionen im 20. Jahrhundert rasant an. Aufträge an Firmen werden durch Auktionen vergeben, Schürfrechte und Sendelizenzen werden versteigert, und nicht zuletzt wurden durch die Verbreitung des Internets virtuelle Auktionshäuser so populär, daß heute Millionen von Menschen als Verkäufer oder Bieter in Auktionen tätig sind.

Dies alles läßt einen genaueren Blick auf die Auktionstheorie, die versucht, die Vorgänge bei Auktionen zu beschreiben, und dadurch sowohl die Auswahl von Auktionsmechanismen als auch Bietstrategien zu erleichtern, durchaus als angebracht erscheinen. Die folgende Ausarbeitung basiert dabei im Wesentlichen auf den ersten Kapiteln der Dissertation von Felix Brandt [1].

1.1 Einige Begriffsdefinitionen

Um die Beschreibungen und Erläuterungen verschiedener Auktionsmodelle und -typen zu vereinfachen, seien hier ein paar Begriffsdefinitionen angebracht.

Bei allen hier vorgestellten Auktionen handelt es sich um 1:n-Auktionen, d.h. es wird ein einzelnes Gut versteigert, an dem n *Bieter* interessiert sind. Das Verkaufsobjekt hat für jeden Bieter i einen bestimmten, tatsächlichen *Wert* v_i (value). Da er jedoch den tatsächlichen Wert u.U. nicht kennt, muß er ihn aufgrund ihm vorliegender Informationen schätzen, man nennt dies seine *Bewertung* $\hat{v}_i$ (valuation) des Objekts. Die Bieter geben *Gebote* b_i (bids) ab, mit denen sie signalisieren, wieviel sie für das Objekt zu zahlen bereit sind. Oftmals ist ein Mindestabstand zwischen den Geboten vorgegeben, der *(Gebots-)Schritt* ϵ.
Ist eine Auktion beendet, so erhält der *Gewinner* der Auktion das Objekt. Er (und bei bestimmten Auktionstypen, die hier nicht näher betrachtet werden, auch die Mitbieter) zahlt einen bestimmten *Preis* p. Der *Ertrag*, den er erhält, ist die Differenz zwischen dem Wert des Objektes, das er erhält, und dem Preis, d.h. $v_i - p$. Man beachte, daß der Ertrag auch negativ sein kann, der Gewinner macht also Verlust, sofern der Preis höher ist, als der Wert.

2 Auktionsmodelle

Reale Auktionen komplett in der Theorie zu beschreiben, ist, aufgrund der oft nicht nachvollziehbaren menschlichen Entscheidungen, die das Bietverhalten der Bieter beeinflussen, wohl meist nicht möglich. Deswegen müssen vereinfachte Modelle zur Beschreibung von Auktoinen und Bietertypen eine Annäherung an die Realität darstellen. Interessanterweise können die theoretischen Betrachtungen dieser Modelle sowohl als Entscheidungshilfe für bietende Menschen, als auch als Vorlage für nichtmenschliche Bietagenten in automatisierten Auktionen dienen, wodurch Theorie und Praxis wieder näher zusammenrücken.

2.1 Bietertypen

Man unterscheidet zwischen risikoaversen, risikoneutralen und risikofreudigen Bietern. Ein risikoneutraler Bieter bewertet Geld linear, d.h. 200.000$ sind für ihn wirklich doppelt so viel Wert, wie 100.000. Ein risikoaverser Bieter (wie es die meisten Menschen sind) bewertet die ersten 100.000 höher als die zweiten. Vor die Wahl gestellt, ob er 100.000 sicher, oder 200.000 mit einer Wahrscheinlichkeit von 50:50 erhalten will, entscheidet sich der risikoaverse Bieter also für ersteres. Dem risikoneutralen Bieter ist es egal, da er durchschnittlich in beiden Fällen 100.000 erhält. Der risikofreudige Bieter entscheidet sich für letzteres.
Da im folgenden stets von risikoneutralen Bietern ausgegangen wird, ist der Ertrag und der Nutzen für den Bieter gleichzusetzen, weswegen u_i(utility) als Abkürzung für den Ertrag verwendet wird.

2.2 Private-Values-Modell

Im Private-Values-Modell wird davon ausgegangen, daß jedem Bieter vollständige Informationen über das Auktionsobjekt vorliegen. Aus diesen leitet er seine Bewertung ab, die (aufgrund der vollständigen Informationen) gleich dem tatsächlichen Wert des Objekts für ihn ist ($\hat{v}_i = v_i$) und unabhängig von den Bewertungen der anderen Bieter, d.h. er würde seine Bewertung auch dann nicht ändern, wenn er die Bewertungen der Mitbieter kennen würde. Dies könnte allerdings seine Bietstrategie beeinflussen.

2.3 Common-Value-Modell

Im Common-Value-Modell hat das Objekt für alle Bieter exakt den gleichen Wert v, ihre Bewertungen $\hat{v}_i$ jedoch unterscheiden sich abhängig von den ihnen zur Verfügung stehenden Informationen. Ein Beispiel aus der Realität sind Erschließungsrechte für Ölquellen. Der tatsächliche Wert ist für alle Firmen gleich, eventuell unterscheiden sich jedoch die Informationen aus Probebohrungen etc., die die Grundlage für die Bewertungen sind.
In einem bekannten Experiment wurden Marmeladengläser, die mit Münzen gefüllt waren, versteigert. Die Bieter waren gezwungen, den Wert der Münzen zu schätzen. Wie zu erwarten, lagen die durchschnittlichen Gebote etwas unter dem tatsächlichen Wert. Da jedoch das höchste Gebot gewann und dieses weit über dem Durchschnitt lag, machte der Gewinner der Auktion in Wirklichkeit einen Verlust. Das Phänomen, daß der durchschnittliche Schätzwert den tatsächlichen Wert recht gut trifft, das gewinnende Gebot diesen jedoch überschätzt (da es unweigerlich über dem Durchschnitt der Schätzungen liegt) ist bei Common-Value-Auktionen häufig zu beobachten und wird "Fluch des Gewinners"(winner's curse) genannt.
Anzumerken ist, daß die deutsche Bezeichnung für das Common-Value-Modell (gemeinsame Bewertungen oder gemeinsame Wertschätzungen) irreführend ist, weswegen hier bei den Bezeichnungen der Auktionstypen auf die englischen Begriffe zurückgegriffen wurde.

2.4 Correlated-Values-Modell

Das Correlated-Values-Modell ist ein umfassenderes Modell, das die zwei vorangegangenen Modelle als Spezialfälle enthält. Es ist sicher das realistischste der hier vorgestellten Modelle, wird jedoch aufgrund seiner Komplexität in der Auktionstheorie eher wenig verwendet und hier nicht näher betrachtet. In ihm hat das Objekt für jeden Bieter einen Wert (dieser kann für verschiedene Bieter verschieden sein), den er aufgrund unvollständiger Informationen schätzen muß (die Bewertung). Der Wert für einen Bieter kann jedoch von den Werten für andere Bieter abhängen (z.B. wegen einer Wiederverkaufsmöglichkeit), was die Betrachtung aufgrund der entstehenden Verknüpfungen erschwert.

3 Auktionstypen

Im Gegensatz zu den Auktionsmodellen betreffen die Auktionstypen nicht das theoretisiche Modell, das der Betrachtung einer Auktion zugrundeliegt, sondern die praktische Durchführung einer Auktion. Verschiedene Auktionstypen werden an verschiedenen Orten der Welt zu unterschiedlichen Zwecken eingesetzt. Oft ist die Wahl des Auktionstyps dabei nicht durchdacht sondern eher historisch gewachsen. Wie sich zeigen wird, sind manche Auktionstypen hinsichtliches ihres Ergebnissses sowohl für die Bieter als auch für den Verkäufer äquivalent, allerdings können die verschiedenen Arten der Durchführung einen psychologischen Einfluß auf das Bietverhalten ausüben. Zu beachten ist, daß bei jedem hier vorgestellten Auktionstyp auch eine Umkehrung möglich ist, d.h. daß es darum geht den niedrigsten Preis z.B. für einen öffentlichen Auftrag zu ermitteln. Dies wird auch oft angewendet, hat jedoch auf die hier vorgenommene theoretische Betrachtung keinen Einfluß und wird daher hier nicht weiter beachtet.

3.1 Englische Auktion

Der bekannteste, weitverbreitetste und wohl auch älteste Auktionstyp ist die sogenannte Englische Auktion. Bei ihr steigt der Preis unaufhörlich bis nur noch ein Bieter übrig ist, der den letztgenannten Preis zu zahlen hat. Es existieren verschiedene Varianten der Durchführung einer Englischen Auktion, so z.B. ob der Preis in festgesetzten Schritten erhöht wird, oder ob einmal ausgestiegene Bieter später wieder einsteigen dürfen. Dies hat jedoch auf die theoretische Betrachtung dieses Auktionstyps keinen Einfluß.

3.2 Holländische Auktion

Die holländische Auktion erhielt ihren Namen von den in Holland durchgeführten Blumenauktionen, die diesen Auktionstyp verwenden und hat auf den ersten Blick scheinbar eine gewisse Ähnlichkeit zur Englischen Auktion. Hierbei wird vom Auktionator ausgehend von einem festgelegten Anfangspreis ein stetig sinkender Preis ausgerufen. Der erste Bieter, der sich meldet, erhält den Zuschlag und bezahlt den ausgerufenen Preis.

3.3 Versiegelte Erstpreisauktion

Bei einer versiegelten Erstpreisauktion gibt jeder Bieter ein einziges Gebot in einem versiegelten Umschlag (oder auf eine andere für Mitbieter nicht einsehbare Weise) ab. Der Auktionator verkündet den Gewinner der Auktion (d.h. den Bieter mit dem höchsten Gebot), der den Preis in Höhe seines Gebotes zu zahlen hat. Dieser Auktionstyp wird oft bei Vergaben von öffentlichen Aufträgen angewandt.

3.4 Vickrey-Auktion

Die Vickrey-Auktion, oder auch versiegelte Zweitpreisauktion, wurde erstmals von William Vickrey, der 1996 zusammen mit James Mirrlees den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften gewann [3], beschrieben. Wie bei der versiegelten Erstpreisauktion gibt dabei jeder Bieter ein Gebot auf eine Weises ab, die es den anderen Bietern nicht erlaubt, sein Gebot zu erfahren. Gewinner der Auktion ist derjenige mit dem höchsten Gebot, allerdings muß er nicht den Preis in Höhe seines eigenen Gebots entrichten, sondern in Höhe des zweithöchsten Gebots. Dies mag zunächst überraschend erscheinen, hat jedoch, wie sich zeigen wird, einen großen Vorteil.

4 Äquivalenzen und Strategien

Betrachtet man die verschiedenen Auktionstypen, so stellt sich unweigerlich die Frage, welche Typen für den Verkäufer am gewinnbringendsten sind, und welche Bietstrategien Bieter anwenden sollten, um für sich ein möglichst gutes Ergebnis zu erreichen, d.h. ihren Ertrag zu maximieren. Ist der Wert eines zu versteigernden Objekts für den Bieter i v_i, und muß er den Preis p bezahlen, so ist sein Ertrag $v_i - p$.
Eines der überraschendsten Theoreme der Untersuchungen über die Äquivalenzen von Auktionen ist das sogenannte Erlös-Äquivalenz-Theorem (Revenue Equivalence Theorem) von William Vickrey.

4.1 Erlös-Äquivalenz-Theorem

Jeder Auktionsmechanismus, in dem das zu versteigernde Objekt dem Höchstbietenden überlassen wird, bringt dem Verkäufer durchschnittlich den gleichen Gewinn ein, sofern von einem Private-Values-Modell ausgegangen wird, die Bieter risikoneutral sind und ihre Gebote unabhängig voneinander aus einem bestimmten Bereich mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung abgeben.

Das Erlös-Äquivalenz-Theorem wird hier nicht bewiesen (Beweise finden sich z.B. bei Wolfstetter [4] oder Klemperer [2]) sondern soll als Hintergrund für die folgenden Betrachtungen dienen, die das zunächst überraschend erscheinendne Erlös-Äquivalenz-Theorem einleuchtender machen sollen.

4.2 Offensichtliche Äquivalenzen

Wenn Auktionstypen von ihrem Ergebnis her äquivalent sind, so ist für sie das Erlös-Äquivalenz-Theorem trivialerweise erfüllt.

Einfach ersichtlich ist, daß versiegelte Erstpreisauktion und Holländische Auktion (sogar) unabhängig von der Risikofreudigkeit der Bieter und vom Auktionsmodell äquivalent sind. Bei beiden Auktionstypen muß sich jeder

Bieter unabhängig von den anderen Bietern ein Gebot überlegen und dieses abgeben, das höchste Gebot gewinnt. Da er sein abgegebenes Gebot bezahlen muß (und die anderen Bieter nichts bezahlen müssen), ist das Ergebnis sowohl für ihn als auch für den Verkäufer bei beiden Auktionstypen das gleiche.

Bei Vickrey- und Englischen Auktionen muß jeweils das Gebot des am zweithöchsten Bietenden bezahlt werden (bzw. einen Gebotsschritt höher bei Englischen Auktionen). Im Private-Values-Modell existiert eine strategische Äquivalenz zwischen beiden Auktionstypen, nämlich einmal, das Gebot b_i abzugeben, und das andere Mal, bis zum Gebot b_i mitzubieten, was im selben Auktionsergebnis mündet. Bei anderen Auktionsmodellen jedoch existiert diese Äquivalenz nicht, da da bei Englischen Auktionen Informationen über das Bietverhalten anderer (und somit über deren Bewertungen) preisgegeben werden, was die Bewertungen der jeweils anderen Bieter, und somit deren Bietstrategien beeinflussen kann.

Somit ist eine Äquivalenz nur im Private-Values-Modell gegeben, was jedoch immer noch ausreicht, umd das Erlös-Äquivalenz-Theorem zu erfüllen.

4.3 Gleichgewichte bei Strategien

Um die Aussage des Erlös-Äquivalenz-Theorems für alle vier hier vorgestellten Auktionstypen zu zeigen, reicht, nachdem die Äquivalenz von Holländischen Auktionen und versiegelten Erstpreisauktionen sowie von Vickrey-Auktionen und Englischen Auktionen unter Bedingungen, die beim Erlös-Äquivalenz-Theorem gegeben sind, festgestellt wurde, ein Vergleich zwischen versiegelter Erstpreisauktion und Vickrey-Auktion. Für die weitere Untersuchung dieser Auktionstypen seien hier zuerst ein paar Definitionen angebracht.

Strategie:
Eine Strategie ist eine gewisse Regel, die einem Bieter sagt, wie er zu bieten hat. Je besser die Strategie, umso besser möglicherweise sein Ertrag bei der Auktion.

Dominante Strategie:
Eine Strategie ist dominant, wenn sie einem Bieter den für ihn höchstmöglichen Ertrag garantiert.

Gleichgewicht dominanter Strategien:
Die Strategien s_i verschiedener Bieter i befinden sich in einem Gleichgewicht dominanter Strategien (dominant strategy equilibrium), wenn jede Strategie s_i dominant ist.

Nash-Gleichgewicht:
Die Strategien verschiedener Bieter befinden sich in einem Nash-Gleichgewicht, wenn kein Bieter seinen Ertrag erhöhen kann, indem er allein eine andere

Strategie wählt.

Bayes-Nash-Gleichgewicht:
Die Strategien verschiedener Bieter, die auf unvollständigen Informationen beruhen, befinden sich in einem Bayes-Nash-Gleichgewicht, wenn kein Bieter seinen erwarteten Ertrag erhöhen kann, indem er allein eine andere Strategie wählt.

4.4 Gleichgewicht dominanter Strategien bei Vickrey-Auktionen

Tatsächlich existiert bei Vickrey-Auktionen im Private-Values-Modell für jeden Bieter eine dominante Strategie, und somit ein Gleichgewicht dominanter Strategien. Die dominante Strategie bei Vickrey-Auktionen besteht darin, daß ein Bieter genau seine eigene Bewertung bietet.
Es wird hier von nur zwei Bietern A und B ausgegangen, da für die Entscheidung wer die Auktion gewinnt, sowie für den zu zahlenden Preis nur die höchsten zwei Gebote entscheidend sind. Der Ertrag der Bieter ist dann

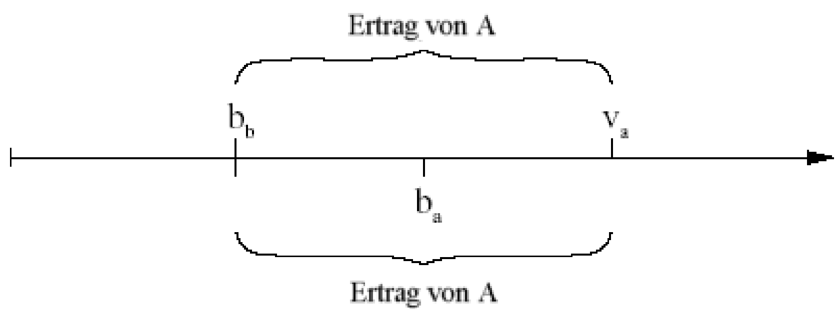
$$u_a\left(b_a, b_b, v_a\right) = \begin{cases} v_a - b_b & \text{falls } b_a \geq b_b \\ 0 & \text{falls } b_a \leq b_b \end{cases}$$

bzw.

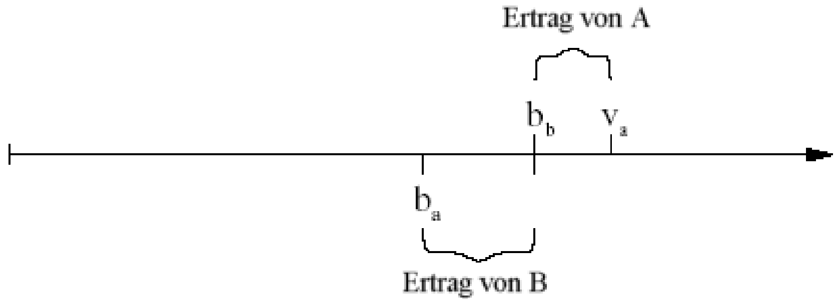
$$u_b\left(b_a, b_b, v_b\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } b_a \geq b_b \\ v_b - b_a & \text{falls } b_a \leq b_b \end{cases}.$$

Im Folgenden wird das Verhalten von Bieter A betrachtet. In den Diagrammen ist oben der Ertrag bei einem Gebot von v_a dargestellt, unten der Ertrag bei einem Abweichen von dieser Strategie.
Bietet A weniger als seine Bewertung ($b_a < v_a$), so sind drei Fälle zu unterscheiden, die vom Gebot des Bieters B abhängen.

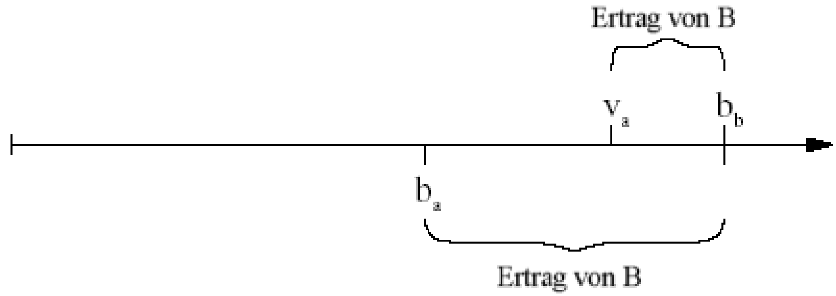
1. $b_b < b_a < v_a$: A gewinnt die Auktion, sein Ertrag ist jedoch nicht größer, als wenn er seine Bewertung v_a geboten hätte, denn der zu entrichtende Preis ist in beiden Fällen b_b, und sein Ertrag somit $v_a - b_b$.



2. $b_a \leq b_b < v_a$: A verliert die Auktion, hätte aber gewonnen, wenn er v_a geboten hätte. Sein Ertrag ist 0 anstatt positiv, sein Mitbieter jedoch erhält durch sein niedrigeres Gebot einen positiven Ertrag. Sofern $b_a = b_b$ ist, gewinnt er möglicherweise (je nach Einzelfallregelung) die Auktion, sein Profit ist jedoch nicht größer, als wenn er v_a geboten hätte.

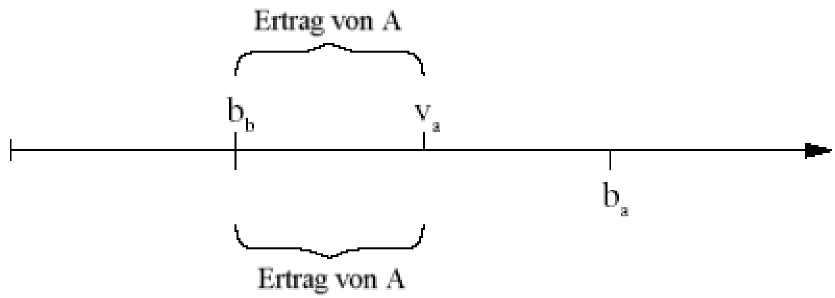


3. $b_a < v_a < b_b$: A verliert die Auktion, hätte aber auch verloren, wenn er v_a geboten hätte. Durch sein niedrigeres Gebot erhält sein Mitbieter einen größeren Ertrag.

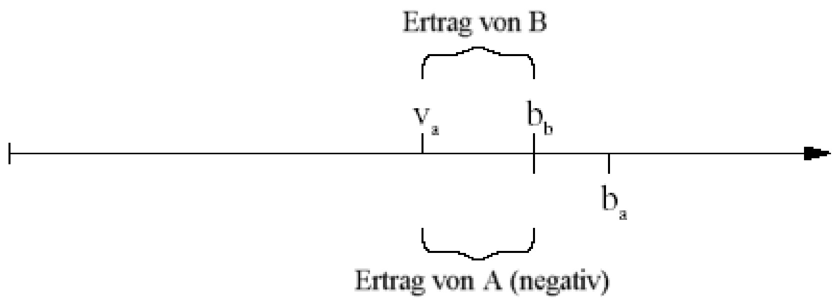


Auch wenn A mehr bietet als seine Bewertung ($b_a > v_a$), sind wiederum drei Fälle abhängig vom Gebot des Mitbieters zu unterscheiden.

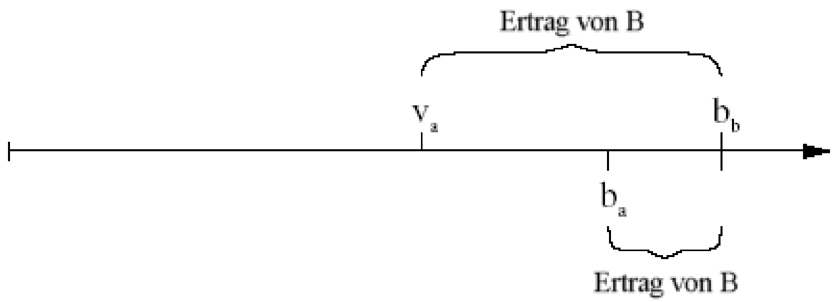
1. $b_b < va < b_a$: A gewinnt, zahlt aber den gleichen Preis, denn er bei einem Gebot von v_a gezahlt hätte, nämlich b_b.



2. $v_a < b_b \leq b_a$: A gewinnt, zahlt aber mehr, als seine Bewertung, d.h. sein Ertrag ist negativ. Ein Gebot von v_a hätte ihn davor bewahrt. Bei gleichen Geboten verliert er (je nach Einzelfallregelung) möglicherweise die Auktion.



3. $v_a < b_a < b_b$ A verliert die Auktion, hätte aber auch bei einem Gebot von v_a verloren. In diesem Fall vermindert er zwar den Ertrag seines Mitbieters, ohne jedoch seinen eigenen Ertrag zu erhöhen.



Es gibt für einen Bieter also keine Möglichkeit, seinen eigenen Ertrag zu erhöhen, indem er etwas anderes bietet als seine tatsächliche Bewertung. Dies erleichtert selbstverständlich den Bietprozeß ungemein, da jeder Bieter auf Spekulationen über Gebote der Mitbieter verzichten kann.

4.5 Nichtexistenz einer dominanten Strategie bei versiegelten Erstpreisauktionen

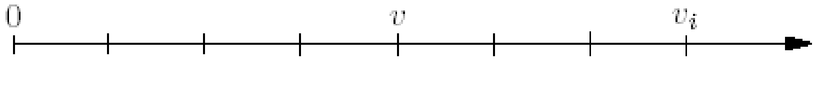
Im Gegensatz zu Vickrey-Auktionen existiert bei versiegelten Erstpreisauktionen keine dominante Strategie.
Bietet ein Gewinner a einer Auktion genau den Betrag seiner Bewertung, so muß er diesen auch bezahlen und hat somit den Ertrag $v_a - p = 0$. Den maximalen Ertrag bekommt er durch ein Gebot $b_a = b_b + \epsilon$, wobei ϵ der kleinstmögliche Gebotsschritt ist. Somit kann es keine dominante Strategie geben, da das Gebot, das zum Maximalertrag führt, immer vom Gebot des zweitplazierten abhängig ist, während eine dominante Strategie den Maximalertrag unabhängig von den anderen Geboten zusichert.

4.6 Bayes-Nash-Gleichgewicht bei versiegelten Erstpreisauktionen

Wie man gesehen hat, erhält ein gewinnender Bieter immer dann den Maximalertrag, wenn er einen Gebotsschritt über dem Gebot des zweitbietenden bietet. Für einen risikoneutralen Bieter ist also die optimale Strategie, das Maximalgebot seiner Konkurrenten so gut wie möglich zu Schätzen und einen Gebotsschritt höher zu bieten. (Ein risikoaverser Bieter z.B. würde mehr bieten, um seine Gewinnchance zu vergrößern, würde dadurch aber seinen Ertrag verringern.)

Geht man nun davon aus, daß alle Bieter risikoneutral sind, ihre Bewertungen unabhängig voneinander und gleichverteilt im Intervall $[0, r]$ liegen, so existiert ein Bayes-Nash-Gleichgewicht, welches dadurch erreicht wird, daß jeder Bieter i mit der Bewertung v_i $b_i = \frac{n-1}{n} v_i + \epsilon$ bietet.

Beweis. Geht man davon aus, daß Bieter i die Auktion gewinnt, so maximiert er seinen Ertrag, indem er einen Gebotsschrit höher als der am zweithöchsten Bietende bietet. Die Frage ist also, was der Erwartungswert für die Bewertung des am zweithöchsten Bietenden ist.
Der Fall, daß Bieter i die Auktion verliert, muß nicht betrachtet werden, da sein Ertrag dann in jedem Fall 0 ist. Somit kann davon ausgegangen werden, daß die Bewertungen der anderen Bieter gleichverteilt im Intervall $[0, v_i]$ liegen.
Die Wahrscheinlichkeit, daß die Bewertung des Bieters j irgendeinen Wert v zwischen 0 und v_i $(0 \leq v < v_i)$ annimmt, ist somit $\frac{1}{v_i}$



Die Wahrscheinlichkeit, daß die Bewertung v_j des Bieters j kleiner gleich v ist $(v_j \leq v)$, ist $\frac{v}{v_i}$. Ist v_i die höchste Bewertung und v das zweithöchste, so sind $n-2$ Bewertungen kleiner gleich v, somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß v die höchste Bewrtung ist

$$\left(\frac{1}{v_i}\right)\left(\frac{v}{v_i}\right)^{n-2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß einer der $n-1$ anderen Bieter v als zweithöchstes Bewertung hat, ist daher

$$(n-1)\left(\frac{1}{v_i}\right)\left(\frac{v}{v_i}\right)^{n-2}.$$

Somit ist der Erwartungswert von v

$$E(v) = \int_0^{v_i} v\,(n-1)\left(\frac{1}{v_i}\right)\left(\frac{v}{v_i}\right)^{n-2} dv = (n-1)\int_0^{v_i} \frac{v^{n-1}}{v_i^{n-1}} dv$$

$$= \frac{n-1}{v_i^{n-1}}\int_0^{v_i} v^{n-1} dv = \frac{n-1}{v_i^{n-1}}\left[\frac{v^n}{n}\right]_0^{v_i} = \frac{n-1}{v_i^{n-1}}\frac{1}{n}v_i^n = \frac{n-1}{n}v_i.$$

Damit existiert ein Bayes-Nash-Gleichgewicht, wenn jeder Bieter $b_i = \frac{n-1}{n}v_i + \epsilon$ bietet. □

Die Gebote nehmen dabei mit zunehmender Bewertung der Bieter zu, es gewinnt also auch hier derjenige mit der höchsten Bewertung. Es gibt kein anderes Bayes-Nash-Gleichgewicht für versiegelte Erstpreisauktionen. Der Höchstbietende muß den Erwartungswert der Bewertung des zweitbietenden ($+\epsilon$) bezahlen, im Durchschnitt also genauso viel, wie bei Vickrey-Auktionen. Damit ist auch hier (bei gleichverteilten Gebotswahrscheinlichkeiten und risikoneutralen Bietern) das Erlös-Äquivalenz-Theorem erfüllt.

Literatur

[1] F. Brandt. Fundamental Aspects of Privacy and Deception in Electronic Auctions, Dissertation, Institut für Informatik der Technischen Universtät München. 2003.

[2] P. Klemperer. Auction theory: A guide to the literature. *Journal of Economic Surveys*, 13(3):227–286, 1999.

[3] B. Moldovanu. William Vickrey und die Auktionstheorie - Anmerkungen zum Nobelpreis 1996. *Wirtschaftsdienst*, 12, 1996.

[4] E. Wolfstetter. Auctions: An introduction. *Journal of Economic Surveys*, pages 367–420, 1996.