Hauptseminar: Spiele in der Informatik

Thema: Minimax Algorithmus

Peter Reimann, 10. Semester

12.06.2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Minimax Algorithmus findet bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen Verwendung. Er garantiert jedem der beiden Spieler den optimalen Gewinn bzw. Verlust, sofern beide eine gemäß dem Algorithmus optimale Strategie für ihren Fall wählen. Damit stellt er eine Art „Lösung“ für das Spiel dar. Das Minimax-Theorem sagt aus, dass bei jedem Zwei-Personen-Nullsummenspiel der mit dem Minimax Algorithmus erzielte optimale Gewinn/Verlust der beiden Spieler identisch ist. Dies bedeutet, dass ein Spieler auf jeden Fall eine seiner optimalen Strategien spielen kann, egal welche Strategie der andere Spieler verwendet. Ein Spieler kann also den anderen Spieler nicht durch einen „cleveren“ Zug daran hindern, eine für ihn optimale Strategie zu spielen.

Diese Seminararbeit basiert hauptsächlich auf dem Buch „Introduction to Game Theory“ von Peter Morris [1]. Es wird daher im Folgenden nicht mehr angegeben.

2 Grundlagen

2.1 Zwei-Personen-Nullsummenspiele und Minimax Algorithmus

Bei einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel gewinnt einer der teilnehmenden Spieler genau den Betrag, den der andere verliert. Ein Beispiel hierfür ist Schach, sofern man definiert, dass der Sieger einen Betrag von $+1$ und der Verlierer von -1 erhält und bei einem Unentschieden beide den Betrag 0 bekommen.

Ein Spiel dieser Form kann als eine m x n-Matrix M dargestellt werden. Ein Spieler hat m Strategien, die mit den Reihen von M identifiziert werden können. Entsprechend hat der andere Spieler n Strategien, für die die Spalten von M stehen. Der „Reihenspieler“ wird im Folgenden mit MAX und der „Spaltenspieler“ mit MIN bezeichnet. Wählt MAX die Strategie i und MIN die Strategie j, so erhält MAX den Wert der Komponente m_{ij} in der i-ten Reihe und j-ten Spalte von M und MIN erhält den Wert $-m_{ij}$. Hieraus folgt, dass MAX große Werte in M bevorzugt, während es bei MIN kleine Werte sind, daher auch die Bezeichnung MAX und MIN. Ein negativer Eintrag in M ist ein Verlust für MAX und ein Gewinn (des Betrags des Eintrags) für MIN.

Ein Sattelpunkt der Spielmatrix M ist ein Eintrag m_{pq}, der sowohl ein Minimum in seiner Reihe als auch ein Maximum in seiner Spalte ist. Solch ein Sattelpunkt ist ein Gleichgewichtspaar von Strategien, da ein Spieler, der als einzelner von dieser Strategie abweicht, nur verlieren kann.

Beim Minimax Algorithmus geht MAX immer davon aus, dass MIN versucht den Gewinn zu minimieren, egal in welcher Spielsituation er sich befindet. Daher wählt MAX eine Reihe von M, so dass der kleinste Eintrag in dieser Reihe so groß wie möglich ist. Der Spieler MIN wählt entsprechend eine Spalte in M, so dass der größte Eintrag in dieser Spalte so klein wie möglich ist.

Definition 2.1: *Seien $u_r(M)$ bzw. $u_c(M)$ der Gewinn von MAX bzw. der Verlust von MIN. Dann gilt für den Minimax Algorithmus*

$$u_r(M) = max_i min_j m_{ij}$$

und

$$u_c(M) = min_j max_i m_{ij}.$$

Die beiden Werte stehen dabei für den garantierten Mindestgewinn für MAX bzw. den garantierten Höchstverlust für MIN. Spielt einer von beiden eine andere Strategie, so könnte der Gewinn für den anderen noch höher ausfallen. Weiterhin gilt folgendes:

Theorem 2.1: *Hat die Spielmatrix M einen Sattelpunkt m_{pq}, so gilt*

$$u_r(M) = u_c(M) = m_{pq}.$$

In diesem Fall liefert der Algorithmus ein Gleichgewichtspaar von Strategien. Anders sieht es dagegen aus, wenn die Spielmatrix M keinen Sattelpunkt enthält. Dann müssen die beiden Spieler an jedem Punkt des Spiels eine zufällige Strategie wählen. Sonst könnte der zweite Spieler die Spielzüge voraussehen und selbst einen Zug wählen, so dass er immer gewinnt. Spieler MAX wählt also ein m-Tupel und Spieler MIN ein n-Tupel von Wahrscheinlichkeiten $\vec{p}$ bzw. $\vec{q}$. MAX spielt dann die Strategie i mit der Wahrscheinlichkeit p_i und MIN die Strategie j mit der Wahrscheinlichkeit q_j. Die Auszahlung der beiden Spieler ist der Erwartungswert der Komponenten von M:

$$E(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j m_{ij}.$$

Beim Minimax Algorithmus für diese gemischten Strategien suchen beide Spieler ein Wahrscheinlichkeitstupel $\vec{p}$ bzw. $\vec{q}$, so dass die Gewinne jeweils optimal sind. Dies führt zu folgendem:

Definition 2.2: *Seien $v_r(M)$ bzw. $v_c(M)$ der Gewinn von MAX bzw. der Verlust von MIN. Dann gilt für den Minimax Algorithmus für gemischte Strategien*

$$v_r(M) = max_{\vec{p}} min_{\vec{q}} E(\vec{p}, \vec{q})$$

und

$$v_c(M) = min_{\vec{q}} max_{\vec{p}} E(\vec{p}, \vec{q}).$$

Das Minimax-Theorem sagt nun aus, dass für jede m x n-Spielmatrix eine optimale gemischte Strategie für Spieler MAX und eine für Spieler MIN gemäß Definition 2.2 existiert und dass dann $v_r(M) = v_c(M)$ gilt. Gilt dieses Theorem, so liefern die beiden optimalen gemischten Strategien ein Gleichgewichtspaar von gemischten Strategien und damit eine Lösung für das Spiel. Beim Beweis müssen wir zunächst zeigen, dass es für jede Spielmatrix jeweils mindestens eine optimale gemischte Strategie für jeden Spieler gibt und dass dann die Werte $v_r(M)$ und $v_c(M)$ für diese Strategien gleich sind. In den nun folgenden Kapiteln werden wir den Beweis für die Gleichheit der beiden Werte durchführen. Der Beweis für die Existenz der Strategien ergibt sich dabei direkt aus deren Konstruktion.

2.2 Beispiele

Nun betrachten wir uns zwei Spielmatrizen als Beispiele.

Beispiel 2.1:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat als einzigen Sattelpunkt die Komponente m_{21}. Diese Komponente ist also die einzige Lösung des Spiels und es gilt $v_r(M) = v_c(M) = m_{21} = -1$.

Beispiel 2.2:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix enthält keinen Sattelpunkt. Wir müssen in diesem Fall also optimale gemischte Strategien für beide Spieler finden. Für Spieler MAX gilt:

$$v_r(M) = max_{\vec{p}} min_j E(\vec{p}, j) \text{ für jedes } j.$$

Weiterhin gehen wir davon aus, dass $\vec{p}$ von der Form $(p,\, 1-p)$ mit $0 \leq p \leq 1$ ist. Dies ergibt für $j = 1, 2$ zwei Funktionen $\pi_j(p) = E((p, 1-p), j)$:

$$\pi_1(p) = 2p - (1-p) = 3p - 1$$

$$\pi_2(p) = -3p + (1-p) = -4p + 1.$$

Setzen wir nun $\pi_1(p) = \pi_2(p)$, erhalten wir $p = 2/7$ und $v_r(M) = \pi_1(2/7) = \pi_2(2/7) = -1/7$.
Für Spieler MIN bekommen wir auf ähnliche Weise zwei Funktionen:

$$\pi^1(q) = 2q - 3(1-q) = 5q - 3$$

$$\pi^2(q) = -q + (1-q) = -2q + 1.$$

Setzen wir wieder beide Funktionen gleich, erhalten wir $\vec{q} = (4/7, 3/7)$ und $v_c(M) = \pi^1(4/7) = \pi^2(4/7) = -1/7$. Da $v_c(M) = v_r(M)$ gilt, haben wir das Spiel damit gelöst.

3 Lineare Programmierung

3.1 primale und duale LP Probleme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Teil der Linearen Programmierung, den wir benötigen, um das Minimax-Theorem zu beweisen. Ein lineares Programmierungsproblem, kurz LP Problem, ist eine reellwertige Funktion w über einen Vektor $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ der Form

$$w(\vec{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + d,$$

wobei man einen oder mehrere Vektoren $\vec{x}$ finden muss, so dass $w(\vec{x})$ entweder maximal oder minimal wird. Allerdings müssen die Vektoren dabei mehreren Einschränkungen genügen. Diese Einschränkungen haben die Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

oder die Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b.$$

Im Allgemeinen betrachtet man nur LP Probleme mit nichtnegativen Elementen x_i aus $\vec{x}$, also mit $x_i \geq 0$ für $i = 1$, ..., n.

Ein Vektor $\vec{x}$ heißt *zulässige Lösung* oder auch *zulässig* für ein LP Problem, wenn er allen Einschränkungen des Problems genügt. Ein LP Problem heißt *zulässig* oder *lösbar*, wenn es mindestens eine zulässige Lösung für das Problem gibt. Eine zulässige Lösung $\vec{x}$ ist *optimal*, wenn die Funktion $w(\vec{x})$ an ihr das Maximum bzw. Minimum annimmt. Unser Ziel ist es nun optimale Lösungen für gewisse LP Probleme zu finden.

Definition 3.1: *Ein LP Problem heißt* primal*, wenn es folgende Form hat:*

$$\textit{maximiere } f(\vec{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^n c_jx_j + d$$

$$\textit{mit Einschränkungen } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \textit{ für } 1 \leq i \leq m,$$

wobei $A = (a_{ij})$ eine m x n-Koeffizientenmatrix, $\vec{c}$ ein n-Tupel und $\vec{b}$ ein m-Tupel von Zahlen und d eine Konstante ist.

Definition 3.2: *Ein LP Problem heißt* dual *bezüglich eines primalen LP Problems gemäß Definition 3.1, wenn es folgende Form hat:*

$$\textit{minimiere } g(\vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^m b_iy_i + d$$

$$\textit{mit Einschränkungen } \textstyle\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j \textit{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Die Koeffizienten in der dualen Funktion $g(\vec{y})$ sind also die rechten Seiten in den primalen Einschränkungen und die rechten Seiten in den dualen Einschränkungen sind die Koeffizienten in der primalen Funktion $f(\vec{x})$. Die Definitionen für zulässige Lösungen und lösbare und optimale LP Probleme gelten sinngemäß auch für primale und duale LP Probleme.

3.2 Basisformen

Um zur Basisform eines primalen LP Problems zu kommen, führen wir für jede der m Einschränkungen eine Zusatzvariable x_{n+i} mit $1 \leq i \leq m$ ein:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Damit ist jeder Vektor $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ eine zulässige Lösung gdw. $x_k \geq 0$ für $1 \leq k \leq n+m$.

Nun können wir das primale LP Problem mit diesen Zusatzvariablen umschreiben:

$$\text{maximiere } f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + d$$

$$\text{mit Einschränkungen } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = -x_{n+i} \text{ für } 1 \leq i \leq m.$$

Diese Form des primalen LP Problems heißt *(primale) Basisform*. Sie ist mathematisch äquivalent zu der ursprünglichen Form, da jede Lösung für die eine Form gleichzeitig eine Lösung für die andere Form ist. Die Zusatzvariablen in den Einschränkungen heißen *Basisvariablen* oder *gebundene Variablen*. Alle anderen Variablen heißen *freie Variablen*. Die Menge der Basisvariabelen heißt die zu der Basisform zugehörige *Basis*. Sie wird mit den Einschränkungen und den freien Variablen berechnet. Die *duale Basisform* erhalten wir aus dem dualen LP Problem mit den Zusatzvariablen $y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ für $1 \leq j \leq n$ anolog:

$$\text{minimiere } g(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + d$$

$$\text{mit Einschränkungen } y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \text{ für } 1 \leq j \leq n,$$

wobei jeder Vektor $\vec{y} = (y_1, ..., y_m)$ erneut eine zulässige Lösung für das duale LP Problem ist gdw. $y_k \geq 0$ für $1 \leq k \leq m+n$.

Durch die Umformung der LP Probleme in ihre Basisformen erhalten wir ein lineares Gleichungssystem (LGS). Dieses LGS können wir in ein neues LGS umformen, indem wir eine Einschränkung nach einer in ihr vorkommenden freien Variablen x_j bzw. y_i auflösen und das Ergebnis in die Funktion $f(\vec{x})$ bzw. $g(\vec{y})$ und in alle anderen Einschränkungen einsetzen. Somit erhalten wir eine neue Basisform, in der eine freie und eine Basisvariable die Plätze getauscht haben (eine freie Variable wird also zur Basisvariablen und eine Basisvariable zur freien Variable) und in der sich einige der Koeffizienten a_{ij}, b_i, c_j und die Konstante d geändert haben können. Die neue Basisform ist mathematisch äquivalent zu der alten Basisform und damit auch zu dem ursprünglichen LP Problem.

Gilt $x_k \geq 0$ für $1 \leq k \leq n+m$, so heißt $(x_1, ..., x_n, ..., x_{n+m})$ eine *zulässige Lösung* für die zugehörige primale Basisform. Wir können einen Vektor $(x_1, ..., x_n)$ auf Zulässigkeit überprüfen, indem wir alle Basisvariablen berechnen und diese auf Positivität überprüfen. Analoges gilt für die duale Basisform. Den wichtigsten Fall bekommen wir, wenn wir alle freien Variablen auf Null setzen und dann die Basisvariablen berechnen.

Definition 3.3: *Die* Basislösung *einer Basisform ist das $(m+n)$-Tupel der freien und der Basisvariablen, das man erhält, indem man alle freien Variablen auf Null setzt und dann die Basisvariablen mit Hilfe der Einschränkungen berechnet.*

Man beachte, dass der Wert der Basisvariablen in einer Basislösung einer primalen Basisform genau das Negative der Konstante in ihrer Einschränkung ist. Bei einer dualen Basislösung haben die Basisvariablen genau den Wert der Konstante in ihrer Einschränkung. Genauso ist der Wert der Funktionen $f(\vec{x})$ bzw. $g(\vec{y})$ bei einer Basislösung der Wert ihrer Konstante d.

Definition 3.4: *Eine Basisform heißt* lösbar*, wenn ihre Basislösung eine zulässige Lösung ist. Eine zulässige Basislösung heißt* optimal*, wenn ihre Funktion $f(\vec{x})$ bzw. $g(\vec{y})$ ihr Maximum bzw. Minimum an der Basislösung erreicht. Dann heißt die Basisform ebenfalls* optimal.

Theorem 3.1 (ohne Beweis): *Ein primales/duales LP Problem hat genau dann eine optimale zulässige Lösung, wenn es auch eine optimale zulässige Basislösung zu einer optimalen Basisform hat.*

Da sich die Funktionen $f(\vec{x})$ bzw. $g(\vec{y})$ bei der Umwandlung in eine Basisform nicht ändern und sich optimale Werte bei der Unwandlung eines LGS in ein anderes LGS (und damit einer Basisform in eine andere Basisform) ebenfalls nicht ändern, ist der optimale Wert einer Basisform nach Theorem 3.1 genauso groß wie der optimale Wert des ursprünglichen LP Problems. Daher können wir Theorem 3.1 ausnutzen, um eine optimale Lösung für ein LP Problem und den Wert dieser Lösung zu berechnen. Ein Algorithmus dafür heißt *Simplex Algorithmus.* Die Idee dabei ist, mit einer lösbaren Basisform für das LP Problem zu beginnen und diese dann so in eine neue Basisform umzuwandeln, dass letztere immer noch lösbar ist und dass der Wert ihrer Basislösung größer wird. Dies wird solange wiederholt, bis eine optimale Basisform und damit eine optimale Lösung für das Problem gefunden wurde. Der genaue Ablauf des Algorithmus wird in Kapitel 5 anhand eines Beispiels verdeutlicht. Die Abbruchbedingung für primale LP Probleme ergibt sich aus folgendem Theorem:

Theorem 3.2: *Für eine primale Basisform gilt:*
(1) Die Basisform ist genau dann lösbar, wenn der Wert der Konstante in jeder Einschränkung nicht positiv ist (also kleiner oder gleich Null).
(2) Sei eine lösbare primale Basisform gegeben. Wenn jeder Koeffizient (einer freien Variablen) in der Funktion $f(\vec{x})$ nicht positiv ist, dann ist die Basisform optimal.

Beweis: (1) Da alle freien Variablen in einer Basislösung Null sind, ist der Wert einer Basisvariablen das Negative der Konstante in ihrer Einschränkung. Ist diese Konstante nicht positiv, so ist die Basisvariable demnach nicht negativ (also größer oder gleich Null). Gilt dies für alle Einschränkungen, so ist die Basislösung eine zulässige Lösung und die Basisform lösbar. Die Umkehrung ist analog.
(2) Wir können die Funktion $f(\vec{x})$ wie folgt schreiben:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m+n} c_k x_k + d,$$

wobei $c_k = 0$ ist, wenn x_k eine Basisvariable ist. Wir gehen nun davon aus, dass $c_k \leq 0$ für jedes k gilt. Wenn $\vec{z}$ eine Basislösung ist, so gilt $c_k = 0$ (bei den Basisvariablen) oder $x_k = 0$ (bei den freien Variablen) für jedes k, und damit

$$f(\vec{z}) = d.$$

Wenn wir nun zeigen, dass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{z})$ für jede zulässige Lösung $\vec{x}$ gilt, ist die Basislösung optimal und wir haben (2) bewiesen. Sei also $\vec{x}$ eine zulässige Lösung, dann gilt $c_k x_k \leq 0$ für jedes k, da $x_k \geq 0$ und $c_k \leq 0$ für jedes k gilt, und somit

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m+n} c_k x_k + d \leq d = f(\vec{z}),$$

und damit $f(\vec{x}) \leq f(\vec{z})$ für jede zulässige Lösung $\vec{x}$ und jede Basislösung $\vec{z}$.

□

Der Simplex Algorithmus für primale LP Probleme bricht also ab, wenn er eine lösbare Basisform gefunden hat, in der jeder Koeffizient einer freien Variablen nicht positiv ist, und liefert dann den Wert der Konstante d als Maximum.

Folgendes Theorem für duale Basisformen ist analog zu Theorem 3.2 für primale Basisformen. Es liefert eine Abbruchbedingung für den dualen Simplex Algorithmus. Der Beweis ist ebenfalls analog.

Theorem 3.3: *Für eine duale Basisform gilt:*
(1) Die Basisform ist genau dann lösbar, wenn der Wert der Konstante in jeder Einschränkung nicht negativ ist (also größer oder gleich Null).
(2) Sei eine lösbare duale Basisform gegeben. Wenn jeder Koeffizient (einer freien Variable) in der Funktion $g(\vec{y})$ nicht negativ ist, dann ist die Basisform optimal.

Mithilfe des nächsten Theorems kann schließlich das Minimax-Theorem bewiesen werden. Es sagt aus, dass, wenn sowohl für ein primales als auch für das dazugehörige duale LP Problem optimale zulässige Lösungen existieren, dann sind die Werte der beiden Funktionen $f(\vec{x})$ bzw. $g(\vec{y})$ für diese Lösungen gleich. Für das Minimax-Theorem müssten wir eigentlich auch noch die Existenz solcher Lösungen beweisen. Dieser Teilbeweis wird hier auf Grund des hohen Aufwands nicht durchgeführt. Interessierte Leser seien hierzu auf das Buch „Introduction to Game Theory" von Peter Morris [1], insbesondere Kapitel 3, verwiesen.

Theorem 3.4: *Seien $\vec{x^*}$ bzw. $\vec{y^*}$ optimale zulässige Lösungen für ein primales LP Problem mit einer zu maximierenden Funktion $f(\vec{x})$ gemäß Definition 3.1 bzw. für das dazugehörige duale LP Problem mit einer zu minimierenden Funktion $g(\vec{y})$ gemäß Definition 3.2. Dann gilt*

$$f(\vec{x^*}) = g(\vec{y^*}).$$

Beweis: Nach Theorem 3.1 haben die beiden LP Probleme jeweils optimale Basisformen mit optimalen zulässigen Basislösungen $\vec{z_p}$ für die primale bzw. $\vec{z_d}$ für die duale Basisform. Die zu optimierenden Funktionen der Basisformen entstehen aus den Funktionen $f(\vec{x})$ und $g(\vec{y})$ durch die Umformungen mittels des Simplex Algorithmus oder des dualen Simplex Algorithmus und lauten (vergleiche Beweis (2) zu Theorem 3.2)

$$f'(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m+n} c'_k x_k + d'$$

bzw.

$$g'(\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m+n} b'_k y_k + d',$$

wobei $c'_k = 0$ bzw. $b'_k = 0$, falls x_k bzw. y_k Basisvariablen sind. Zu beachten ist dabei, dass die Konstanten d' der beiden Funktionen den gleichen Wert haben. Dies gilt, da der Simplex Algorithmus und der duale Simplex Algorithmus ihre Umformungen analog durchführen und in jedem Schritt die gleichen Werte zu den Konstanten addiert bzw. subtrahiert werden. Letztendlich gilt für die optimalen Basislösungen (vergleiche Beweis (2) zu Theorem 3.2)

$$f'(\vec{z_p}) = d' \text{ und } g'(\vec{z_d}) = d'$$

und, da sich die optimalen Werte bei den Umformungen nicht ändern,

$$f(\vec{x^*}) = d' \text{ und } g(\vec{y^*}) = d'$$

und damit

$$f(\vec{x^*}) = g(\vec{y^*}).$$

□

4 Das Minimax-Theorem

Um das Minimax-Theorem mit Hilfe des Theorems 3.4 zu beweisen, muss erst gezeigt werden, wie man eine Spielmatrix in ein Paar von primalen und dualen LP Problemen umwandelt. Wie wir später sehen werden, liefert uns diese Umwandlung gleichzeitig eine Möglichkeit, die optimalen gemischten Strategien von Spieler MAX und Spieler MIN zu berechnen und damit das Spiel zu lösen.

Sei M eine m x n-Spielmatrix. Spieler MAX hat also m Strategien mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{p} = (p_1, ..., p_m)$. Sein Ziel ist es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu finden, so dass sein Gewinn v maximal ist und dass $v = min_j \sum_{i=1}^{m} p_i m_{ij}$ gilt (Minimax-Algorithmus).

Wir schreiben das Problem ein wenig um. Das neue Problem lautet: Finde eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{p}$ und den dazugehörigen Gewinn v, so dass v maximal ist und dass folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $p_i \geq 0$ für $1 \leq i \leq m$.

(2) $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

(3) $v \leq \sum_{i=1}^{m} p_i m_{ij}$ für $1 \leq j \leq n$.

Die ersten beiden Bedingungen sind die üblichen Bedingungen für Wahrscheinlichkeiten. Bedingung (3) impliziert, dass $v = min_j \sum_{i=1}^{m} p_i m_{ij}$ gilt, sofern Spieler MAX versucht v zu maximieren.

Damit haben wir mit dieser neuen Formulierung ein zu der alten Formulierung äquivalentes LP Problem erzeugt. Dieses Problem hat allerdings den Nachteil, dass v auch negativ (dann würde Spieler MAX etwas verlieren) oder Null sein kann. Dies können wir beheben, indem wir eine Konstante c wählen, so dass in der Matrix M für jede Komponente $m_{ij} + c > 0$ gilt, und dann zu jedem Eintrag in M c addieren. Ist jeder Eintrag in M positiv, so ist auch v positiv. Dieser Schritt ändert jedoch die optimalen gemischten Strategien nicht. Wir müssen lediglich am Ende den Wert c wieder von v subtrahieren, um das korrekte Ergebnis zu erhalten.

Als nächstes wollen wir obiges LP Problem in ein duales LP Problem umwandeln. Dazu verwenden wir einen Vektor $\vec{y} = (y_1, ..., y_m)$, so dass gilt

$$y_i = p_i/v \text{ für } 1 \leq i \leq m. \tag{1}$$

Hier sieht man, warum v echt positiv sein muss. Sonst wären die Variablen y_i negativ oder man würde durch Null teilen. Aus Bedingung (2) folgt

$$\tfrac{1}{v} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Bedingung (3) liefert uns

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} m_{ij} y_i \geq 1 \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Da das Maximieren von v gleichbedeutend mit dem Minimieren von $\frac{1}{v}$ ist, kommen wir schließlich zu folgendem dualen LP Problem:

$$\text{minimiere } y_1 + ... + y_m \tag{2}$$

$$\text{mit Einschränkungen } \textstyle\sum_{i=1}^{m} m_{ij} y_i \geq 1 \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Das LP Problem für Spieler MIN können wir auf ähnliche Weise formulieren: Finde eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{q} = (q_1, ..., q_n)$ und einen Wert v, so dass v minimal ist und dass folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $q_j \geq 0$ für $1 \leq j \leq n$.

(2) $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

(3) $v \geq \sum_{j=1}^{n} q_j m_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$.

Bedingung (3) impliziert, dass wie gewünscht $v = max_i \sum_{j=1}^{n} q_j m_{ij}$ gilt, wenn v minimal ist. Zu den einzelnen Einträgen m_{ij} wird die gleiche Konstante c wie oben addiert. Um das Problem in ein primales LP Problem umzuwandeln, verwenden wir einen Vektor $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ mit

$$x_j = q_j/v \text{ für } 1 \leq j \leq n. \tag{3}$$

Analog zu dem dualen LP Problem von Spieler MAX erhalten wir so das primale LP Problem von Spieler MIN:

$$\text{maximiere } x_1 + ... + x_n \tag{4}$$

$$\text{mit Einschränkungen } \textstyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j \leq 1 \text{ für } 1 \leq i \leq m.$$

Wie man leicht sieht, gehören das duale LP Problem von Spieler MAX und das primale LP Problem von Spieler MIN nach Definitionen 3.1 und 3.2 zusammen. Folgende Methode liefert ein Lösungsverfahren für Matrixspiele:

(1) *Bestimme die Konstante c wie oben beschrieben ($m_{ij} + c > 0$) und addiere diese zu jedem Eintrag der Matrix M. Merke die Konstante c.*

(2) *Stelle die Probleme (2) und (4) auf und löse sie mit dem (dualen) Simplex Algorithmus.*

(3) *Berechne die Werte v für beide Spieler als Kehrwert der mit Hilfe des (dualen) Simplex Algorithmus errechneten optimalen Werte.*

(4) *Berechne die optimalen gemischten Strategien $\vec{p}$ und $\vec{q}$ mit den vom (dualen) Simplex Algorithmus berechneten optimalen Vektoren und Gleichungen (1) und (3).*

(5) *Berechne die optimalen Gewinne von Spieler MAX und MIN durch Subtrahieren der gemerkten Konstante c von den in Schritt (3) berechneten Werten v.*

Mit den gewonnenen Erkenntnissen können wir nun das Minimax-Theorem beweisen.

Theorem 4.1 (DAS MINIMAX-THEOREM): *Sei M eine m x n-Spielmatrix. Dann haben sowohl Spieler MAX als auch Spieler MIN optimale gemischte Strategien und die optimalen Gewinne für beide Spieler haben den gleichen Wert.*

Beweis: Die Existenz der optimalen gemischten Strategien ergibt sich aus obigem Verfahren zum Lösen von Matrixspielen und dem (dualen) Simplex Algorithmus. Der Beweis hierfür wird an dieser Stelle, wie in Kapitel 3 schon erwähnt, weggelassen.

Der Beweis für die Gleichheit der optimalen Werte ergibt sich ebenfalls aus obigem Verfahren und nach Umwandlung in ein primales und duales LP Problem aus Theorem 3.4.

□

5 Colonel Blottos Spiel

Dieses Spiel ist ein Militärspiel. Colonel Blotto führt eine Infanteriearmee, die aus vier Regimentern besteht. Der Gegner, General Attila, besitzt drei Regimenter. Es gibt zwei strategisch wichtige Orte, die beide erobern wollen - San Juan Hill und Lookout Mountain. Beide Heerführer müssen nun entscheiden, wie sie ihre Regimenter auf die beiden Orte verteilen. Ein Kampf an einem der Orte endet siegreich für denjenigen, der dort mehr Regimenter als der Gegner hin geschickt hat, und unentschieden, falls die Anzahl der Regimenter gleich ist. Wenn eine Armee aus r Regimentern eine Armee aus s Regimentern besiegt, erhält der Gewinner $s + 1$ Punkte. Er bekommt also einen Punkt für jedes besiegte Regiment plus einen Punkt für die Eroberung der Position. Bei einem Unentschieden gewinnt keiner der Spieler etwas. Da es sich um ein Nullsummenspiel handelt, verliert der Verlierer den gleichen Betrag. Der Gesamtgewinn oder -verlust eines Spielers ist die Summe seiner Gewinne oder Verluste an beiden Positionen. Im folgenden seien, wie in Kapitel 2 beschrieben, positive Werte Gewinne für Colonel Blotto und negative Werte Gewinne für General Attila. Dann ergibt sich folgende Spielmatrix:

	(3, 0)	(0, 3)	(2, 1)	(1,2)
(4, 0)	4	0	2	1
(0, 4)	0	4	1	2
(3, 1)	1	-1	3	0
(1, 3)	-1	1	0	3
(2, 2)	-2	-2	2	2

Die Matrix hat keinen Sattelpunkt. Man muss also die optimalen gemischten Strategien $\vec{p}$ und $\vec{q}$ für beide Spieler und den optimalen Gewinn mit dem Lösungsverfahren aus Kapitel 4 berechnen. Im ersten Schritt addieren wir zu jedem Eintrag in der Spielmatrix den gleichen Wert c, so dass alle Einträge echt positiv sind. Da der kleinste Eintrag -2 beträgt, können wir $c = 3$ verwenden und erhalten folgende modifizierte Spielmatrix:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

In Schritt (2) stellen wir das duale LP Problem für Colonel Blotto

$$\text{minimiere } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} 7y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 + y_5 &\geq 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5 &\geq 1 \\ 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 3y_4 + 5y_5 &\geq 1 \\ 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 5y_5 &\geq 1, \end{aligned}$$

und das primale LP Problem von General Attila auf

$$\text{maximiere } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\leq 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 &\leq 1. \end{aligned}$$

Die Basisform des primalen LP Problems von General Attila lautet dann:

$$\text{maximiere } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 1 &= -x_5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 1 &= -x_6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 1 &= -x_7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 1 &= -x_8 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 1 &= -x_9. \end{aligned}$$

Diese kann man etwas anschaulicher in einem *Tableau* darstellen:

x_1	x_2	x_3	x_4	-1		
7	3	5	4	1	=	$-x_5$
3	7	4	5	1	=	$-x_6$
4	2	6	3	1	=	$-x_7$
2	4	3	6	1	=	$-x_8$
1	1	5	5	1	=	$-x_9$
1	1	1	1	0	=	f

Die letzte Zeile ist die zu maximierende Funktion, alle anderen Zeilen bis auf die oberste stehen für die Einschränkungen. Dabei muss jedes Element mit dem Element in der obersten Zeile seiner Spalte multipliziert werden, um die Gleichungen zu erhalten. Durch die -1 im obersten Element der fünften Spalte können wir die Werte der fünf Basisvariablen x_5 bis x_9 direkt aus dieser Spalte herauslesen. Der Wert der Basislösung ist dann das Negative des Eintrags in der fünften Spalte der letzten Zeile. Das Tableau der dualen Basisform von Colonel Blotto erhalten wir analog:

y_1	7	3	5	4	1
y_2	3	7	4	5	1
y_3	4	2	6	3	1
y_4	2	4	3	6	1
y_5	1	1	5	5	1
-1	1	1	1	1	0
	$= y_6$	$= y_7$	$= y_8$	$= y_9$	$= g$

Hier sind die Spalten die einzelnen Gleichungen. Der Wert der Basislösung ist das Negative des Eintrags der letzten Spalte in der vorletzten Reihe. Die Werte der vier Basisvariablen y_6 bis y_9 sind diesmal das Negative der Einträge in der vorletzten Reihe. Durch die gespiegelte Darstellung sind alle Zahlen beim primalen und beim dualen Tableau an den einzelnen Stellen identisch. Deswegen können wir beide Tableaus in einem einzelnen Tableau darstellen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-1		
y_1	7	3	5	4	1	=	$-x_5$
y_2	3	7	4	5	1	=	$-x_6$
y_3	4	2	6	3	1	=	$-x_7$
y_4	2	4	3	*6	1	=	$-x_8$
y_5	1	1	5	5	1	=	$-x_9$
-1	1	1	1	1	0	=	f
	$= y_6$	$= y_7$	$= y_8$	$= y_9$	$= g$		

Aus Theorem 3.2 ergibt sich, dass die primale Basisform genau dann lösbar ist, wenn jeder Eintrag in der rechten Spalte des primalen Tableaus (ohne die obere Zeile) nicht negativ ist. Ebenso ist eine lösbare primale Basisform genau dann optimal, wenn jeder Eintrag in der unteren Reihe (ohne die letzte Spalte) nicht positiv ist. Aus Theorem 3.3 ergibt sich, dass die duale Basisform genau dann lösbar ist, wenn jeder Eintrag in der unteren Reihe des dualen Tableaus (ohne die letzte Spalte) nicht positiv ist. Sie ist genau dann optimal, wenn sie lösbar ist und wenn jeder Eintrag in der rechten Spalte (ohne die obere Zeile) nicht negativ ist.

Also ist in unserem Beispiel die primale Basisform lösbar aber nicht optimal, während die duale Basisform nicht lösbar ist. Wir wollen nun den Simplex Algorithmus auf unsere Probleme anwenden, um so die optimalen Werte zu errechnen. Man sieht leicht, dass wenn eine der Basisformen lösbar und optimal ist, dann ist es auch die andere, sofern man die gleichen Umformungen bei beiden Tableaus durchführt. Deswegen und wegen Theorem 3.4 reicht es aus, wenn wir den normalen Simplex Algorithmus auf das Tableau anwenden, in dem beide Basisformen zusammengefasst sind. Haben wir eine optimale Lösung für die primale Basisform errechnet, so haben wir auch gleichzeitig eine optimale Lösung für die duale Basisform errechnet.

Der Simplex Algorithmus ist nur auf lösbare primale Basisformen anwendbar. Bei einer lösbaren, optimalen Basisform bricht er ab und liefert die optimalen Werte. In unserem Beispiel ist der Algorithmus also auf die primale Basisform anwendbar (auf die duale Basisform könnten wir den dualen Simplex Algorithmus nicht anwenden, da diese nicht lösbar ist). Der Algorithmus sucht sich nun irgend eine Spalte aus (außer die rechte Spalte), in dessen unterem Eintrag der Wert echt positiv ist. Dies ist in jeder Spalte der Fall. Wir wählen willkürlich die Spalte von x_4. Danach wählt er einen Eintrag in dieser Spalte aus (außer den unteren Eintrag), dessen Wert echt positiv ist, und bei dem der Quotient des Wertes in der rechten Spalte der Reihe, in welcher der Eintrag steht, geteilt durch den Eintrag selbst minimal ist. In unserem Fall ist es der Eintrag in der Spalte von x_4 und in der Reihe von x_8 ($1/6$ ist minimal). Er ist in obigem Tableau mit einem Stern markiert. Wir lösen die Einschränkung in der Reihe des Eintrags nach der freien Variable seiner Spalte auf. Wir erhalten also die Gleichung $x_4 = -\frac{1}{6}x_8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}$. Im neuen Tableau vertauschen wir die freien Variablen x_4 und y_4 mit den Basisvariablen x_8 und y_9 und setzen in jede Gleichung die errechnete Gleichung für x_4 ein. Dies ergibt das neue Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_8	-1		
y_1	$*_3 17/3$	1/3	3	-2/3	1/3	=	$-x_5$
y_2	4/3	$*_2 11/3$	3/2	-5/6	1/6	=	$-x_6$
y_3	3	0	9/2	-1/2	1/2	=	$-x_7$
y_9	1/3	2/3	1/2	1/6	1/6	=	$-x_4$
y_5	-2/3	-7/3	$*_1 5/2$	-5/6	1/6	=	$-x_9$
-1	2/3	1/3	1/2	-1/6	-1/6	=	f
	$= y_6$	$= y_7$	$= y_8$	$= y_4$	$= g$		

Die in diesem Tableau enthaltene primale Basisform ist wieder lösbar, aber nicht optimal. Allerdings ist der Eintrag unten rechts kleiner geworden (und damit der Wert der Funktionen größer). Also sind wir dem optimalen Wert ein kleines Stück näher gekommen. Wir benötigen noch drei weitere Durchläufe, bis der Simplex Algorithmus eine optimale Lösung berechnet hat. Dabei wählen wir nacheinander die Spalten von x_3, x_2 und x_1, sowie die Reihen von x_9, x_6 und x_5 und führen die Umformungen genau wie oben durch. Dann erhalten wir das Tableau

	x_5	x_6	x_9	x_8	-1		
y_6	38/205	-47/410	-63/410	1/10	7/410	=	$-x_1$
y_7	-13/205	97/410	-27/410	-1/10	3/410	=	$-x_2$
y_3	-21/41	–21/41	-36/41	1	4/41	=	$-x_7$
y_9	-3/205	-44/205	-11/205	2/5	24/205	=	$-x_4$
y_8	-2/205	39/205	61/205	-2/5	16/205	=	$-x_3$
-1	-4/41	-4/41	-1/41	0	-9/41	=	f
	$= y_1$	$= y_2$	$= y_5$	$= y_4$	$= g$		

Die zu diesem Tableau gehörigen Baisformen sind beide lösbar sowie optimal. Die Lösungen können direkt aus dem Tableau abgelesen werden. Wir erhalten die optimalen Basislösungen $\vec{x} = (7/410, 3/410, 16/205, 24/205, 0, 0, 4/41, 0, 0)$ und $\vec{y} = (4/41, 4/41, 0, 0, 1/41, 0, 0, 0, 0)$. Der mit dem Simplex Algorithmus errechnete optimale Wert beträgt 9/41. Damit ist Schritt (2) beendet.

In Schritt (3) berechnen wir den optimalen Wert v für beide Spieler als den Kehrwert der optimalen Lösung des Simplex Algorithmus, also $v = 41/9$.

Führen wir schließlich noch Schritt (4) (Berechnen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen) und (5) (Subtrahieren der Konstante c von v) durch, so erhalten wir die Lösung des Spiels:

$$Wert = 14/9,$$

$$\vec{p} = (4/9, 4/9, 0, 0, 1/9),$$

$$\vec{q} = (7/90, 1/30, 16/45, 8/15).$$

Dies sagt uns, dass Colonel Blotto seine Regimenter jedes Mal komplett auf eine der beiden Positionen konzentrieren muss. Nur in einem von neun Fällen, muss er sie gleichmäßig verteilen. General Attila muss sie entsprechend der Wahrscheinlichkeiten in $\vec{q}$ verteilen. Durchschnittlich gewinnt dann Colonel Blotto 14/9 Punkte, während General Attila dieselbe Punktzahl verliert. Dass Colonel Blotto im Schnitt mehr gewinnt ist ersichtlich, da er ein Regiment mehr zur Verfügung hat.

Literatur

[1] Peter Morris: „Introduction to Game Theory“, Verlag: Springer, Berlin 1994