

# Worst-Case-Gleichgewichte

Andreas Gaiser

23. Juni 2006

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Spielmodell</b>	<b>2</b>
2.1	Einige Definitionen aus der Spieltheorie . . . . .	2
2.1.1	Bestandteile eines Spiels . . . . .	2
2.1.2	Strategien . . . . .	2
2.1.3	Nash-Gleichgewichte . . . . .	3
2.2	Modellierung eines Netzwerks . . . . .	3
2.3	Bestandteile des Modells . . . . .	3
2.4	Strategien und Kosten . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Nash-Gleichgewichte</b>	<b>6</b>
3.1	Wieso untersuchen wir Nash-Gleichgewichte? . . . . .	6
3.2	Notwendige Bedingung für Nash-Gleichgewichte . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Worst-Case-Gleichgewichte</b>	<b>9</b>
4.1	Das Koordinationsverhältnis . . . . .	9
4.1.1	Untere Abschätzung des sozialen Optimums . . . . .	10
4.2	Spezialfall: Zwei Links . . . . .	10
4.2.1	Untere Schranke für das Koordinationsverhältnis . . . . .	10
4.2.2	Obere Schranke für das Koordinationsverhältnis . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Literatur und Quellen</b>	<b>13</b>

# 1 Einleitung

Das Internet ist ein riesiges und global arbeitendes Netzwerk. Es sieht keine Möglichkeit vor, die Aktionen seiner Benutzer zentral zu koordinieren, um beispielsweise eine Art Gerechtigkeit in Bezug auf Wartezeiten zu realisieren. Es herrscht "Anarchie" im Internet: Jeder Benutzer verhält sich egoistisch und versucht, seine **eigenen** Ziele möglichst schnell zu erreichen. Diese Ziele bestehen in erster Linie aus dem Erledigen von Datentransporten. Dabei erscheint interessant zu beobachten, wieviel Performance durch das Fehlen von Koordination verloren geht. Damit wird eine ganz neue Kategorie von algorithmischen Problemen aufgeworfen: Wurde bisher vor allem das Fehlen von unbenutzten Ressourcen oder Informationen untersucht, steht nun die Koordination der Benutzer (bzw. deren Fehlen) im Mittelpunkt.

Im Weiteren soll gezeigt werden, wie Konzepte der Spieltheorie zur Analyse der Problemstellung angewendet werden können. Eine geeignete Formalisierung wird uns helfen, Abschätzungen für den Performanceverlust durch Koordinationslosigkeit herzuleiten. Die Performance einer Situation werden wir daran messen, wie lange ein Benutzer maximal warten muss, bis seine Datentransporte abgeschlossen sind. Wir beziehen uns dabei fast ausschließlich auf [KP99], in dem dieses Modell erstmalig definiert wurde, und benutzen weitestgehend dieselben Bezeichnungen.

## 2 Spielmodell

### 2.1 Einige Definitionen aus der Spieltheorie

Zunächst wiederholen wir einige Grundbegriffe der Spieltheorie, die wir an unsere Bedürfnisse angepasst haben. Für eine genauere Einführung sei auf [Mor94] oder [Owe71] verwiesen.

#### 2.1.1 Bestandteile eines Spiels

Die Spielszenarien, die wir betrachten wollen, bestehen aus:

- $n$  Spieler  $1, \dots, n$
- $m$  Strategien, wobei wir die Menge der Strategien mit  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  bezeichnen wollen. Bei den uns interessierenden Spielen kann jeder Spieler jede Strategie wählen.
- Kostenfunktionen  $C_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ , die für eine Kombination von  $n$  Strategien einem Spieler  $i$  Kosten zuweisen.

#### 2.1.2 Strategien

Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Strategien  $s_j$  bezeichnen wir als **reine Strategien**. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{s}_i : S \rightarrow [0, 1]$  nennen wir **gemischte Strategie**, die Menge aller gemischten Strategien bezeichnen wir

mit  $\tilde{S}$ . Die Kostenfunktion für eine gemischte Strategie ist folglich ein Erwartungswert:

$$\tilde{C}_i : \tilde{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{C}_i : (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n) \mapsto \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in S^n} \prod_{k=1}^n \tilde{s}_i(s_k) C_i(s_1, \dots, s_n)$$

### 2.1.3 Nash-Gleichgewichte

In diesem Abschnitt soll nicht unter reinen und gemischten Strategien unterschieden werden, daher sollen die Bezeichnungen  $C_i$  und  $s_j$  sowohl für reine als auch gemischte Strategien gelten. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Kombination von Strategien  $(s_1, \dots, s_n)$ , so dass ein einzelner Spieler  $i$ , sollte er von seiner Strategie  $s_i$  abweichen, eine Erhöhung oder zumindest keine Verbesserung seiner Kosten zu erwarten hat:

**Definition 1** Eine Kombination  $(s_1, \dots, s_n) \in S^n$  von Strategien bildet ein Nash-Gleichgewicht  $\Leftrightarrow \forall s'_i \in S : C_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n) \geq C_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ .

Bei dem hier zu untersuchenden Spieltyp werden wir der Übersicht wegen für die Definition einer Kostenfunktion eine etwas andere Schreibweise einführen: Wir fixieren eine Kombination von Strategien, und definieren für diese Strategien eine Kostenfunktion  $C : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur noch vom Spieler abhängt.

## 2.2 Modellierung eines Netzwerks

### 2.3 Bestandteile des Modells

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, möchten wir Erkenntnisse aus der Spieltheorie anwenden, um Vorgänge beim Datentransport eines Netzwerkes zu beleuchten. Dazu abstrahieren wir die uns interessierenden Bestandteile eines Netzwerkes, bilden ein einfaches Modell und weisen die spieltheoretischen Größen den Modellelementen zu.

Wir führen zunächst einige Größen ein, um das gesamte Spielszenario ausreichend beschreiben zu können:

- **Links** (Leitungen) verbinden Rechner untereinander
- Links besitzen (evtl. unterschiedliche) **Kapazitäten** bzw. **Geschwindigkeiten**
- Internetbenutzer sind die **Spieler**
- Spieler möchten eine gewisse Anzahl von **Datenpaketen** an ein Ziel schicken
- **Strategien** der Spieler setzen sich aus der Wahl geeigneter Links zusammen

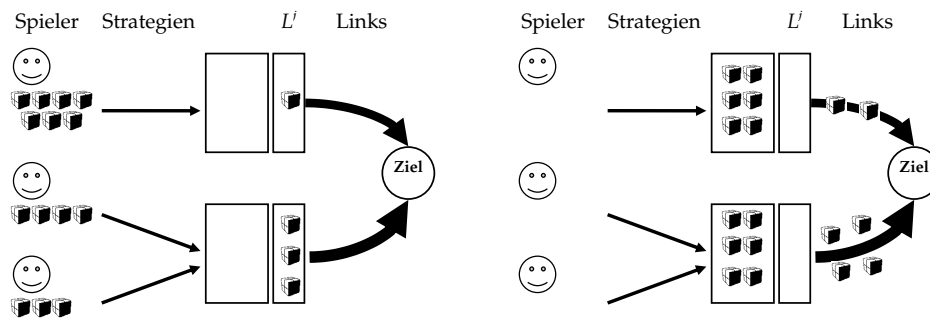


Abbildung 1: Netzwerk als Spiel

Das Spiel besteht also darin, geschickt Links zu wählen, um möglichst schnell seine Daten ans Ziel zu schicken. Im Weiteren werden wir nur ein eingeschränktes Szenario betrachten, um das Herleiten von Abschätzungen zu vereinfachen und die Formalisierung besser konkretisieren zu können:

1.  $m$  parallele Links führen zum selben Ziel
2. Alle Links haben dieselben Kapazitäten und Geschwindigkeiten
3.  $n$  Spieler  $1, \dots, n$
4. Spieler  $i$  muss  $w_i$  Daten(pakete) an das Ziel schicken
5. Jeder Spieler kann nur einen Link für den Datentransport wählen

Insbesondere ist kein Aufteilen der Datenpakete eines einzelnen Spielers auf verschiedene Links möglich. Der "Zug" eines Spielers besteht lediglich im Auswählen eines der  $m$  parallelen Links für seine Datenpakete. Im Weiteren soll  $m$  immer für die Anzahl der Links stehen,  $n$  für die Anzahl der Spieler; ebenso soll die Variable  $i$  einen bestimmten einzelnen Spieler,  $j$  einen bestimmten Link bezeichnen.

## 2.4 Strategien und Kosten

In der Spieltheorie unterscheidet man, wie schon erwähnt, zwischen reinen und gemischten Strategien. Auch auf unser Spielmodell sind diese Begriffe anwendbar:

- Eine **reine** Strategie besteht aus der Wahl genau eines Links
- Eine **gemischte** Strategie besteht aus einem Wahrscheinlichkeitsmaß über den Links  $1, \dots, m$  (den reinen Strategien)

Eine gemischte Strategie ist also durch  $m$  Wahrscheinlichkeiten festgelegt, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler  $i$  Link  $j$  wählt. Im Weiteren wollen wir diese Wahrscheinlichkeit als  $p_i^j$  bezeichnen. Natürlich kann man eine reine Strategie als einen Spezialfall der gemischten Strategien ansehen, bei

der  $p_i^j = 0$  für alle Links  $j$  bis auf einen gilt. Hängt im folgenden eine Größe von einem Link  $j$  ab, so wird dieser Wert hochgestellt, hängt sie von einem Spieler  $i$  ab, steht der Index  $i$  unten.

Um die **Kosten** (also die Auszahlungsfunktion) für jeden einzelnen Spieler  $i$  angeben zu können, nehmen wir an, dass die Datenpakete in einem speziellen Scheduling-Verfahren verschickt werden, dem sogenannten Round-Robin. Round-Robin benutzt eine Warteschlange: Jeder Spieler erhält für einen kurzen Zeitraum Zugriff auf den Link und kann Daten verschicken, danach wird er hinten in die Warteschlange eingereiht, sofern er seine Daten noch nicht komplett verschickt hat. Dies führt zu folgender Kostenfunktion für eine feste Wahl von reinen Strategien  $(j_1, \dots, j_n)$ , wobei Spieler  $i$  den Link  $j_i$  wählt:

$$C(i) = L^{j_i} + \sum_{j_k=j_i} w_k$$

Die  $L^{j_i}$  bezeichnen Datentransporte, die der jeweilige Link zu Beginn noch abzuarbeiten hat. Sie werden also nicht durch die Wahl der Spieler verändert und stellen eine Art Konstantglied in der Berechnung der Kostenfunktion dar. Wir werden später sehen, dass sie in unserem Kostenmodell durch Spieler mit reinen Strategien ersetzt werden können. Eine Kostenfunktion für gemischte Strategien berücksichtigt die Wahrscheinlichkeiten  $p_i^j$  und stellt einen Erwartungswert dar:

$$C(i) = \sum_{j=1}^m p_i^j (L^j + \sum_{k \neq i} p_k^j w_k + w_i)$$

Uns wird vor allem die maximale Wartezeit der Spielers interessieren, also  $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} C(i)$ .

**Beispiel 1** Wir wählen ein Szenario mit 3 Spielern und 2 Links, wobei für die Datenmengen der Spieler gelten soll:

$$w_1 = w_2 = 4, w_3 = 2$$

Wir verzichten auf Anfangstransporte, also  $L^1 = L^2 = 0$ . Die Spieler 1 und 2 entscheiden sich zu Beginn für Link 1, Spieler 3 wählt Link 2.

$$(p_i^j) = \begin{pmatrix} p_1^1 = 1 & p_1^2 = 0 \\ p_2^1 = 1 & p_2^2 = 0 \\ p_3^1 = 0 & p_3^2 = 1 \end{pmatrix}$$

Es liegt also eine reine Strategie vor. Die Kosten für die einzelnen Spieler betragen

$$\begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ C(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1(4+4) + p_1^2(4+2) \\ p_2^1(4+4) + p_2^2(4+2) \\ p_3^1(4+4+2) + p_3^2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2** Man sieht, dass für die Spieler 1 und 2 in Beispiel 1 die Lage etwas unbefriedigend ist: Sie benötigen doppelt so lange für ihre Datentransporte als im optimalsten Falle nötig. Wir lassen daher beide Spieler ihre Strategien ändern; sie berücksichtigen nun auch den anderen Link:

$$(p_i^j) = \begin{pmatrix} p_1^1 = 3/4 & p_1^2 = 1/4 \\ p_2^1 = 3/4 & p_2^2 = 1/4 \\ p_3^1 = 0 & p_3^2 = 1 \end{pmatrix}$$

Es liegt nun eine gemischte Strategie vor, und dadurch verändern sich die Kosten folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ C(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1(4 + 12/4) + p_1^2(4 + 1 + 2) \\ p_2^1(4 + 12/4) + p_2^2(4 + 1 + 2) \\ p_3^1(2 + 3 + 3) + p_3^2(2 + 1 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Spieler 3 dürfte nicht allzuglücklich mit dieser Entwicklung sein, er kann jedoch nichts dagegen tun. Es gilt nämlich nun:  $C(3) = p_3^1 8 + p_3^2 4$ . Würde er nun  $p_3^1$  einen Wert  $> 0$  zuweisen, verschlechtert sich seine Situation. Wir befinden uns außerdem in einem **Nash-Gleichgewicht**, denn für die Kosten der Spieler 1 und 2 gilt außerdem:  $C(1) = p_1^1 7 + p_1^2 7 = 7(p_1^1 + p_1^2) = 7 = p_2^1 7 + p_2^2 7 = C(2)$ ; keine Veränderung ihrer Strategie kann also eine Verbesserung bringen.

### 3 Nash-Gleichgewichte

#### 3.1 Wieso untersuchen wir Nash-Gleichgewichte?

Die Frage scheint berechtigt, warum wir uns nun mit Nash-Gleichgewichten unseres Spielmodells beschäftigen. Wir nehmen an, dass jeder Benutzer bzw. Spieler nur von der (groben) Ausgangslage seiner Mitspieler Kenntnis hat, nicht aber von ihren Strategien. Es scheint außerdem vernünftig, folgendes anzunehmen: Wenn ein Spieler merkt, dass er seine Datentransporte schneller erledigen kann, wenn er seine gerade verwendete Linkwahl verändert, wird er er diese Möglichkeit auch nutzen, siehe auch Beispiel 1. Sollte sich durch eine Änderung seiner Strategie jedoch eine Verschlechterung seiner Wartezeit einstellen, wird er zu seiner alten Strategie zurückkehren. So konvergiert das Szenario also zu einem Nash-Gleichgewicht: Die Strategien der Spieler sind so aufeinander abgestimmt, dass eine Änderung der Strategie eines einzelnen Spielers zu einer Verschlechterung seiner Situation führen würde, er müsste also länger warten. Es erscheint gerechtfertigt, dass Nash-Gleichgewichte die Realität in einem Netzwerk zumindest annähern.

#### 3.2 Notwendige Bedingung für Nash-Gleichgewichte

Wir möchten die Nash-Gleichgewichte unseres Modells näher charakterisieren. Gegeben seien  $m$  Links, alle mit derselben Geschwindigkeit und Kapazität, sowie  $n$  Spieler mit ihren Datenmengen  $w_i$ . Variabel ist die Wahl der

Strategien (festgelegt durch die Werte  $p_i^j$ ), die darüber entscheidet, ob sich das Spiel in einem Nash-Gleichgewicht befindet.

Wir wollen mit  $M^j$  den Erwartungswert des Datenverkehrs von Link  $j$  bezeichnen:

$$M^j = L^j + \sum_{k=1}^n p_k^j w_k \quad (1)$$

Als weitere Größe soll  $c_i^j$  die Zeit bezeichnen, die Spieler  $i$  warten muss, wenn er seine Datenpakete dem Link  $j$  zuordnet:

$$c_i^j = w_i + L^j + \sum_{i \neq k} p_k^j w_k = M^j + (1 - p_i^j) w_i \quad (2)$$

Es gilt dann:

$$C(i) = \sum_{j=1}^m p_i^j c_i^j \quad (3)$$

Ein Nash-Gleichgewicht liegt vor, wenn kein Spieler  $i$  durch das alleinige Ändern seiner Strategie (der Werte  $p_i^j$ ) eine Verkürzung seiner Wartezeit erreichen kann. Sei der Wert  $c_i$  definiert durch

$$c_i = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} c_i^j,$$

bezeichnet also das kleinste  $c_i^j$ . Es gilt für ein Nash-Gleichgewicht und für alle Spieler  $i$  und Links  $j$ :

$$p_i^j > 0 \implies c_i^j = c_i \quad (4)$$

Nur jenen Links wird also von einem Spieler eine Wahrscheinlichkeit größer 0 eingeräumt, die minimale Zeit benötigen, um die Datenpakete zu verschicken. Um diese Aussage zu beweisen, nehmen wir an, es gelte für einen Link  $l$  und einen Spieler  $s$ :  $p_s^l = \alpha > 0$  und  $c_s^l = \tilde{c} \neq c_s$ . Es gibt mindestens einen Link  $\tilde{l}$  mit  $c_s^{\tilde{l}} = c_s$ . Wir definieren eine neue Strategie  $p_s^{l,j}$  für Spieler  $s$ :

$$p_s^{l,j} = \begin{cases} p_s^j, & \text{wenn } j \notin \{\tilde{l}, l\} \\ p_s^{\tilde{l}} + p_s^l, & \text{wenn } j = \tilde{l} \\ 0, & \text{wenn } j = l \end{cases}$$

Es gilt:  $C(i) = \sum_{k=1}^m p_i^k c_i^k$  und  $p_s^l c_s^l + p_s^{\tilde{l}} c_s^{\tilde{l}} < p_s^{\tilde{l}} c_s^{\tilde{l}} + p_s^l c_s^l = p_s^{\tilde{l}} c_s^{\tilde{l}} + p_s^{\tilde{l}} c_s^{\tilde{l}}$  Wir haben eine für Spieler  $s$  günstigere Strategie gefunden:

$$C(s) = \sum_{k=1}^m p_s^k c_s^k > \sum_{k=1}^m p_s^{l,k} c_s^k$$

Also lag kein Nash-Gleichgewicht vor.

**Beispiel 3** Wir betrachten erneut das Beispiel 1. Für die reinen Strategien galt  $C(1) = p_1^1(4+4) + p_1^2(4+2) = 8p_1^1 + 6p_1^2$ , also  $c_1^1 = 8, c_2^1 = 6, c_3^1 = 6$ . Nach obigem Satz wäre Spieler 1 besser beraten, hier beispielsweise die Strategie  $p_1^1 = 0, p_1^2 = 1$  zu wählen, um so seine Kosten zu senken. Also definieren wir  $p_i^j$  neu:

$$(p_i^j) = \begin{pmatrix} p_1^1 = 0 & p_1^2 = 1 \\ p_2^1 = 1 & p_2^2 = 0 \\ p_3^1 = 0 & p_3^2 = 1 \end{pmatrix}$$

Die Kosten betragen nun:

$$\begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ C(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1(4+4) + p_1^2(4+2) \\ p_2^1(4) + p_2^2(4+2) \\ p_3^1(2+4) + p_3^2(2+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten dadurch wieder ein Nash-Gleichgewicht.

Wir bilden die Mengen aller Links, denen  $i$  eine Wahrscheinlichkeit größer 0 zuordnet, mit  $S_i = \{l \mid p_i^l > 0\}$ , und nennen sie den **Support** von  $i$ .

Zusätzlich definieren wir einen Satz von Variablen  $S_i^j$ , die ausdrücken, ob Link  $j$  im Support von Spieler  $i$  liegt:

$$S_i^j = \begin{cases} 1, & j \in S_i \\ 0, & j \notin S_i \end{cases}$$

Folgender Satz sagt aus, dass wir durch die Supports ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht definieren können (falls existent):

**Satz 1** Es gibt höchstens ein Nash-Gleichgewicht mit den gegebenen Supports  $S_1, \dots, S_n$ .

*Beweis.* Seien  $S_1, \dots, S_n$  und damit auch die  $S_i^j$ 's gegeben. Zunächst gilt für ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir (3) umformen und die Aussage von oben verwenden:

$$p_i^j = \begin{cases} (M^j + w_i - c_i)/w_i & \text{wenn } S_i^j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

Also ist  $p_i^j = S_i^j(M^j + w_i - c_i)/w_i$ , und wir können (1) ebenfalls umformen:

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : M^j = L^j + \sum_i S_i^j(M^j + w_i - c_i) \quad (6)$$

Da die  $p_i^j$  auch Wahrscheinlichkeitsmaße bilden, muss auch noch gelten:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^m S_i^j(M^j + w_i - c_i) = w_i \quad (7)$$

(6) und (7) liefern uns  $m + n$  unabhängige Gleichungen. Da auch nur  $m + n$  Größen ein Nash-Gleichgewicht definieren (nur die  $n$   $c_i$ 's und die  $m$   $M^j$ 's sind

die Unbekannten), ist das Gleichgewicht vollständig bestimmt, und es kann kein anderes mit demselben Support geben. Anzumerken bleibt noch, dass nicht jede Menge von Supports auch ein Nash-Gleichgewicht definieren muß, da eventuell die resultierenden  $p_i^j$  keine Wahrscheinlichkeitswerte darstellen, und das Gleichungssystem daher keine Lösung besitzt.

**Beispiel 4** Wir betrachten Beispiel 2, und zeigen mithilfe des gerade bewiesenen Satzes, dass ein Nash-Gleichgewicht vorliegt. Zunächst bilden wir die Supportmengen:  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = \{2\}$ . Die  $n + m = 5$  Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} M^1 &= 0 + M^1 + 4 - c_1 + M^1 + 4 - c_2 \\ M^2 &= 0 + M^2 + 4 - c_1 + M^2 + 4 - c_2 + M^2 + 2 - c_3 \\ 4 &= M^1 + 4 - c_1 + M^2 + 4 - c_1 \\ 4 &= M^1 + 4 - c_2 + M^2 + 4 - c_2 \\ 2 &= M^2 + 2 - c_3 \end{aligned}$$

$M^1, M^2, c_1, c_2, c_3$  sind die Unbekannten. Nach Lösen des LGS erhalten wir  $M^1 = 6, M^2 = 4, c_1 = 7, c_2 = 7, c_3 = 4$ . Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten  $p_i^j$  unter Berücksichtigung von (5) als  $p_1^1 = p_2^1 = 1/4, p_1^2 = p_2^2 = 3/4, p_3^1 = 0, p_3^2 = 1$ , also genau dieselben Strategien wie im Beispiel gegeben. Es gibt nach Satz 1 nur dieses Gleichgewicht mit den angegebenen Supports.

## 4 Worst-Case-Gleichgewichte

### 4.1 Das Koordinationsverhältnis

Wie in der Einleitung schon angesprochen, betrachten wir vor allem Spiele, die sich in einem Nash-Gleichgewicht befinden. Es kann unterschiedliche Gleichgewichte geben, in denen ein Spieler, je nach Wahl seiner und der Strategien seiner Mitspieler, unterschiedlich lange auf das Erledigen seines Datentransports warten muß. Wir möchten untersuchen, wie sehr sich Nash-Gleichgewichte für dasselbe Spielszenario dahingehend unterscheiden, wie lange ein Spieler maximal warten muß.

Zunächst führen wir eine neue Größe für ein Nash-Gleichgewicht ein, die sogenannten **sozialen Kosten**  $cost$ . Sie sollen die maximale Zeitspanne beschreiben, die ein Spieler in einem speziellen Spielszenario und Gleichgewicht durchschnittlich warten muß, also sozusagen den worst case für einen Spieler:

$$cost = \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_n=1}^m \prod_{i=1}^n p_i^{j_i} \max_{j=1, \dots, m} \{L^j + \sum_{t=j} w_t\} \quad (8)$$

Den Wert  $\min cost$ , wobei über alle Nash-Gleichgewichte das Minimum gebildet wird, bezeichnen wir als **soziales Optimum**  $opt$ . Uns interessiert nun das Koordinationsverhältnis  $R = \max cost / opt$ , wobei hier wieder über alle Nash-Gleichgewichte maximiert wird. Es ist ein Maß dafür, wie "ungerecht" eine Situation für die schwächsten Spieler ist.

**Beispiel 5** Wir kehren wieder zu Beispiel 2 zurück, und berechnen die sozialen Kosten für dieses Nash-Gleichgewicht. Dazu betrachten wir die möglichen reinen Strategien des Szenarios als 3-Tupel  $((j_1, j_2, j_3))$  bedeutet Spieler  $i$  wählt Link  $j_i$ ) und berechnen ihre Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P((1, 1, 2)) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{9}{16} \\ P((1, 2, 2)) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{16} \\ P((2, 1, 2)) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{16} \\ P((2, 2, 2)) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Mithilfe der maximalen Kosten der Strategiekombinationen errechnen wir:

$$\text{cost}_2 = \frac{9}{16} \cdot 8 + \frac{3}{16} \cdot 6 + \frac{3}{16} \cdot 6 + \frac{1}{16} \cdot 10 = 7,375$$

Im Gegensatz dazu gilt beim Nash-Gleichgewicht aus Beispiel 3, das nur reine Strategien verwendet,  $\text{cost}_3 = 6$ .

#### 4.1.1 Untere Abschätzung des sozialen Optimums

Das soziale Optimum zu berechnen ist ein NP-vollständiges Problem (Reduktion auf das Partitionierungsproblem). Uns soll jedoch eine Abschätzung genügen:

$$\begin{aligned} \text{opt} &\geq \max(\{w_1, \dots, w_n\} \cup \{\sum_{j=1}^m M^j/m\}) = \\ &\max(\{w_1, \dots, w_n\} \cup \{(\sum_{j=1}^m L^j + \sum_{i=1}^n w_i)/m\}) \end{aligned} \quad (9)$$

## 4.2 Spezialfall: Zwei Links

Wir wollen nun das Koordinationsverhältnis für einen einfachen Spezialfall bestimmen, nämlich für ein Netzwerk mit zwei (parallelen) Links mit gleicher Geschwindigkeit und beliebig vielen Spielern. Zur Vereinfachung können wir die  $L^j$ -Werte durch zusätzliche Spieler ersetzen, deren Datenmenge genau  $L^j$  beträgt und die reine Strategien verfolgen (Der Spieler für  $L^j$  wählt immer Link  $j$ ). Man sieht mit (1) ein, dass sich die Werte von  $M^j$  dadurch nicht verändern.

### 4.2.1 Untere Schranke für das Koordinationsverhältnis

Die untere Schranke ist verhältnismäßig einfach zu finden:

**Satz 2** Das Koordinationsverhältnis für zwei Links beträgt mindestens  $3/2$ .

*Beweis.* Wir betrachten zwei Spieler 1,2 mit  $w_1 = w_2 = 1$ . Wir definieren ein Nash-Gleichgewicht durch  $p_1^1 = p_2^2 = 1$  und  $p_2^1 = p_1^2 = 0$ . Die Spieler wählen also auf jeden Fall verschiedene Links, und erreichen daher die kürzestmöglichen Wartezeiten, die in diesem Spiel möglich sind. Es ergibt sich  $\text{opt} = 1$ .

Ein weiteres Nash-Gleichgewicht ergibt sich durch die Wahrscheinlichkeiten  $p_1^1 = p_2^1 = p_1^2 = p_2^2 = 1/2$ , wobei hier jedoch  $cost = \frac{3}{2}$  ist. Also ergibt sich:

$$\max cost/opt \geq \frac{\frac{3}{2}}{1} = 3/2 \quad (10)$$

#### 4.2.2 Obere Schranke für das Koordinationsverhältnis

Etwas umfangreicher ist die Herleitung einer oberen Schranke. Um eine obere Schranke für das Koordinationsverhältnis zu ermitteln, versuchen wir, (8) abzuschätzen.

Dazu führen wir zunächst eine neue Größe ein, die **Zuteilungswahrscheinlichkeit**  $q_i$ . Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler  $i$  den Link wählt, der am meisten Datenpakete verarbeiten muß (Gibt es mehrere solche Links, wählen wir z.Bsp. den lexikografisch ersten dieser Links), also einen Link, der direkt die Sozialen Kosten bestimmt. Es gilt daher

$$cost = \sum_i q_i w_i \quad (11)$$

Als weitere Hilfsgröße definieren wir die **Kollisionswahrscheinlichkeit**  $t_{ik}$ . Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit zwei Spieler  $i$  und  $k$  denselben Link wählen. Diese Größe lässt sich einfach errechnen:

$$t_{ik} = \sum_{j=1}^m p_i^j p_k^j \quad (12)$$

Für ein Spiel mit zwei Links gilt: Zwei Spieler  $i$  und  $k$  können nur dann den Wert der sozialen Kosten beeinflussen, wenn sie denselben Link wählen. Es gilt also:

$$q_i + q_k \leq 1 + t_{ik} \quad (13)$$

**Beispiel 6** Wir betrachten erneut Beispiel 2. Wir möchten berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler 1 und Spieler 2 bzw. 3 denselben Link wählen:

$$t_{12} = \sum_{j=1}^2 p_1^j p_2^j = p_1^1 p_2^1 + p_1^2 p_2^2 = 9/16 + 1/16 = 5/8$$

$$t_{13} = \sum_{j=1}^2 p_1^j p_3^j = 0 + 1/4 = 1/4$$

Wir können uns auch fragen, wie viel Datenpakete durchschnittlich der Link zu verarbeiten hat, den Spieler 1 wählt:

$$w_1 + \sum_{i \neq 1} t_{1i} w_i = w_1 + t_{12} w_2 + t_{13} w_3 = 4 + 5/2 + 1/2 = 7$$

Wir vergleichen diesen Wert mit den Kosten  $c_1 = c_1^1 = c_1^2$ :

$$c_1 = w_1 + p_2^1 w_2 + p_3^1 w_3 = 4 + 3 = 7$$

Es ist kein Zufall, dass diese beiden Werte übereinstimmen, wie wir im Weiteren sehen werden.

Der folgende Satz bringt  $t_{ik}$  und  $c_i$  miteinander in Beziehung:

**Satz 3** Für die Kollisionswahrscheinlichkeiten in einem Nash-Gleichgewicht mit beliebig vielen Links gilt:

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = c_i - w_i$$

*Beweis.*

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \sum_{j=1}^m p_i^j \sum_{k \neq i} p_k^j w_k = \sum_{j=1}^m p_i^j (M^j - p_i^j w_i)$$

Aus (5) folgt  $p_i^j = S_i^j (M^j + w_i - c_i) / w_i$ . Sei  $S_i^j = 0$ . Dann ist  $p_i^j (M^j - p_i^j w_i) = 0 = 0 \cdot (c_i - w_i)$ . Ist  $S_i^j = 1$ , so gilt  $p_i^j (M^j - p_i^j w_i) = p_i^j (M^j - (M^j + w_i - c_i)) = p_i^j (c_i - w_i)$ . Also:

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \sum_j p_i^j (c_i - w_i) = c_i - w_i \quad (14)$$

Zuletzt benötigen wir noch folgende Abschätzung

$$c_i \geq \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{m} + \frac{m-1}{m} w_i, \quad (15)$$

die daraus folgt, dass  $c_i = \min_j c_i^j \geq \frac{1}{m} \sum_j (M^j + (1-p_i^j) w_i) = \frac{\sum_j M^j}{m} + \frac{m-1}{m} w_i = \frac{\sum_{k=1}^n w_k}{m} + \frac{m-1}{m} w_i$ .

Nun können wir die Abschätzung des Koordinationsverhältnisses mit folgendem Satz beweisen:

**Satz 4** Das Koordinationsverhältnis für eine beliebige Anzahl von Spielern und zwei Links beträgt höchstens  $3/2$ .

*Beweis.* Aus (13) folgt  $\sum_{k \neq i} (q_i + q_k) w_k \leq \sum_{k \neq i} (1 + t_{ik}) w_k$ . Mit Satz 3 und (15) erhalten wir  $\sum_{k \neq i} (q_i + q_k) w_k \leq \frac{3}{2} \sum_{k \neq i} w_k$ . Also:

$$\begin{aligned} \text{cost} &= \sum_{k=1}^n q_k w_k = \sum_{k=1}^n (q_k + q_i) w_k - \sum_{k=1}^n q_i w_k = \\ &= \sum_{k \neq i} (q_k + q_i) w_k - q_i \sum_{k=1}^n w_k + 2q_i w_i \leq \frac{3}{2} \sum_{k \neq i} w_k - q_i \sum_{k=1}^n w_k + 2q_i w_i = \\ &= \left(\frac{3}{2} - q_i\right) \sum_{k=1}^n w_k + \left(2q_i - \frac{3}{2}\right) w_i \end{aligned}$$

Mithilfe unserer Abschätzung für das soziale Optimum (9) und der Beschränkung auf zwei Links gilt

$$cost \leq \left(\frac{3}{2} - q_i\right)2opt + \left(2q_i - \frac{3}{2}\right)opt = \frac{3}{2}opt,$$

also:

$$cost/opt \leq \frac{3}{2}.$$

## 5 Ausblick

Das vorgestellte Modell enthält noch viele Möglichkeiten der Erweiterung. Zuallererst ist natürlich für eine praktische Anwendung die Simulation einer komplexeren Netzwerkstruktur wünschenswert, die nicht nur parallele Links zu einem Ziel umfasst. Außerdem könnte unsere Kostenfunktion  $C(i)$  verfeinert werden, um realistischere Abschätzungen zu treffen. Ebenso ist unsere Annahme, dass die Zeit, die ein Link zum Abarbeiten von Datentransporten benötigt, proportional zur Menge der Datenpaketen ist, nicht immer gerechtfertigt. Oft ist eine nichtlineare Funktion angebrachter. Noch interessanter ist das Berücksichtigen verschiedener Netzwerkprotokolle wie zum Beispiel TCP/IP (Verhalten bei Paketverlust, Strategien zur Verteilung der Datenpakete). Bei der Analyse bestehender und dem Entwerfen neuer Netzwerkprotokolle (speziell Routingprotokollen und Routing-Metriken) könnte das vorgestellte Modell mithilfe dieser Erweiterungen dienlich sein. Jedoch sind dazu genauere Untersuchungen und noch einiges an grundlegenden Gesetzmäßigkeiten des Spielmodells zu untersuchen.

## 6 Literatur und Quellen

### Literatur

- [KP99] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. *Lecture Notes in Computer Science*, 1563:404–413, 1999.
- [Mor94] Peter Morris. *Introduction to game theory*. Springer-Verlag, 1994.
- [Owe71] Guillermo Owen. *Spieltheorie*. Springer-Verlag, 1971.