

Der Hilbert-Kalkül für die Aussagenlogik

(Notizen zur Vorlesung “Logik” im Wintersemester 2003/04 an
der Universität Stuttgart)

Javier Esparza und Barbara König

4. Dezember 2003

Für eine gegebene aussagenlogische Formel gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten, um festzustellen, dass sie gültig (bzw. unerfüllbar) ist: die Wahrheitstafel oder ein Kalkül, der sich auf syntaktische Umformungen der betrachteten Formel stützt. Es gibt viele verschiedene Kalküle, die sich wiederum in zwei Gruppen einteilen lassen:

- Kalküle, die als Grundlage von automatischen Verfahren dienen (Beispiel: Resolutionskalkül)
- Kalküle, die mathematisches Schließen nachbilden (Beispiel: Hilbert-Kalkül)

Ein Beispiel für die erste Gruppe von Kalkülen haben wir mit dem Resolutionskalkül bereits kennengelernt. Mit dem Hilbert-Kalkül - benannt nach dem Mathematiker David Hilbert (1862–1943) - wird jetzt ein Vertreter der zweiten Gruppe vorgestellt. Verglichen mit dem Resolutionskalkül ist der Vollständigkeitsbeweis für den Hilbert-Kalkül komplexer, enthält aber viele interessante Konzepte, die typisch für mathematisches Schließen sind, und die im Resolutionskalkül in dieser Form nicht vorkommen.

Die folgende Darstellung stützt sich auf [KL94, Eic93].

1 Grundlegende Definitionen

Es gibt mehrere verschiedene Hilbert-Kalküle. In der von uns betrachteten Version des Hilbert-Kalküls beschränken wir uns auf Formeln, die nur aus dem einstelligen Operator \neg (Negation) und dem zweistelligen Operator \rightarrow (Implikation) bestehen. Diese beiden Operatoren sind bekanntermaßen bereits vollständig für die Aussagenlogik.

Das grundlegende Prinzip des Hilbert-Kalküls ist einfach: es gibt fünf Formelschemata, sogenannte Axiome, aus denen sich weitere Formeln entweder durch Instanziierung (Einsetzen) oder durch eine Schlußregel, den sogenannten Modus Ponens, herleiten lassen. Es ist relativ offensichtlich, dass man auf diese Weise nur gültige Formeln enthält, die viel schwierigere Frage ist, ob man auch *alle* gültigen Formeln enthält. Wenn sich eine Formel F im Hilbert-Kalkül herleiten läßt, so schreiben wir $\vdash F$ (vergleiche dies mit der Notation $\models F$, die besagt, dass F gültig ist). Verallgemeinert schreiben wir auch $M \vdash F$, wobei M eine Menge von Formeln ist, was besagen soll, dass F aus den Axiomen *und* aus den Formeln in M herleitbar ist (vergleiche dies mit der Notation $M \models F$).

Axiome: Der Kalkül, den wir betrachten, stützt sich auf folgende fünf Axiome oder vielmehr Axiomenschemata, da jedes Axiom für eine unendliche Menge von Formeln steht.

- (1) $F \rightarrow (G \rightarrow F)$
- (2) $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$
- (3) $(\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow F)$
- (4) $F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$
- (5) $(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$

Dabei stehen F, G, H für beliebige aussagenlogische Formeln. Man kann leicht zeigen, dass die Axiome (1)–(5) immer gültige Formeln darstellen, gleichgültig, welche Formeln man für F, G, H einsetzt.

Der Begriff der Ableitung im Hilbert-Kalkül beschreibt nun formal, wie man eine Formel F aus den Axiomen und einer gegebenen Formelmenge M herleiten kann.

Definition 1.1 (Ableitung im Hilbert-Kalkül) Sei M eine Menge von Formeln - auch Menge von Hypothesen genannt - und F eine Formel. Wir schreiben $M \vdash F$ und sagen F ist im Hilbert-Kalkül aus M herleitbar, genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Axiom: F entspricht einem der oben angegebenen Axiomenschemata (in diesem Fall heißt F Instanz eines Axioms) oder

Hypothese: $F \in M$ oder

Modus Ponens: es gilt $M \vdash G \rightarrow F$ und $M \vdash G$

Die oben beschriebene Schlußregel Modus Ponens kann auch folgendermaßen notiert werden (in Worten: aus $G \rightarrow F$ und G kann F abgeleitet werden).

$$\frac{\begin{array}{l} M \vdash G \rightarrow F \\ M \vdash G \end{array}}{M \vdash F}$$

Beispiel 1: Sei F eine beliebige Formel. Wir zeigen im folgenden eine Ableitung von $F \rightarrow F$ aus der leeren Hypothesenmenge, d.h., wir zeigen $\vdash F \rightarrow F$

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $\vdash F \rightarrow ((G \rightarrow F) \rightarrow F)$ | Instanz von Axiom (1) |
| 2. $\vdash (F \rightarrow ((G \rightarrow F) \rightarrow F))$
$\quad \rightarrow ((F \rightarrow (G \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F))$ | Instanz von Axiom (2) |
| 3. $\vdash (F \rightarrow (G \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F)$ | Modus Ponens aus 1. & 2. |
| 4. $\vdash F \rightarrow (G \rightarrow F)$ | Instanz von Axiom (1) |
| 5. $\vdash F \rightarrow F$ | Modus Ponens aus 3. & 4. |

Beispiel 2: Wir zeigen $\neg\neg F \vdash F$ für eine beliebige Formel F .

- | | | |
|----|---|--------------------------|
| 1. | $\neg\neg F \vdash \neg\neg F \rightarrow (\neg\neg\neg\neg F \rightarrow \neg\neg F)$ | Instanz von Axiom (1) |
| 2. | $\neg\neg F \vdash \neg\neg F$ | Hypothese |
| 3. | $\neg\neg F \vdash \neg\neg\neg\neg F \rightarrow \neg\neg F$ | Modus Ponens aus 1. & 2. |
| 4. | $\neg\neg F \vdash (\neg\neg\neg\neg F \rightarrow \neg\neg F) \rightarrow (\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F)$ | Instanz von Axiom (3) |
| 5. | $\neg\neg F \vdash \neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$ | Modus Ponens aus 3. & 4. |
| 6. | $\neg\neg F \vdash (\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F) \rightarrow (\neg\neg F \rightarrow F)$ | Instanz von Axiom (3) |
| 7. | $\neg\neg F \vdash \neg\neg F \rightarrow F$ | Modus Ponens aus 5. & 6. |
| 8. | $\neg\neg F \vdash F$ | Modus Ponens aus 2. & 7. |

2 Korrektheit

Wenn man einen Kalkül definiert hat, so interessiert man sich vor allem für die Korrektheit und Vollständigkeit:

Korrektheit: Folgt aus der Ableitbarkeit im Kalkül auch die semantische Folgerung? Anders ausgedrückt: Folgt aus $M \vdash F$ stets $M \models F$?

Vollständigkeit: Folgt aus der semantischen Folgerung immer auch die Ableitbarkeit im Kalkül? Anders ausgedrückt: Folgt aus $M \models F$ stets $M \vdash F$?

Im allgemeinen ist die Korrektheit eines Kalküls relativ einfach zu beweisen, der Beweis wird normalerweise durch Induktion über die Ableitung geführt. Vollständigkeit ist normalerweise schwieriger zu beweisen. Daher zeigen wir zunächst die Korrektheit.

Theorem 2.1 (Korrektheit des Hilbert-Kalküls) Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel, M eine Menge von Formeln und es gelte $M \vdash F$. Dann folgt daraus auch $M \models F$.

Beweis: Wir zeigen diese Aussage durch Induktion über die Ableitung $M \vdash F$.

Axiom: Wir nehmen an, dass F die Instanz eines Axioms ist, woraus man folgern kann, dass F gültig ist. Für eine gültige Formel F gilt $M \models F$ für jede beliebige Menge M .

Hypothese: In diesem Fall ist F ein Element aus M . Sei \mathcal{A} eine Belegung, die ein Modell für M ist. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A}(F) = 1$ und damit $M \models F$.

Modus Ponens: Wir nehmen an, dass $M \vdash G \rightarrow F$ und $M \vdash G$ gilt und dass $M \vdash F$ mit Hilfe des Modus Ponens aus diesen Ableitungen hergeleitet wurde. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $M \models G \rightarrow F$ und $M \models G$.

Sei nun \mathcal{A} ein Modell von M . Dann gilt $\mathcal{A}(G \rightarrow F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$. Also muß nach der Wahrheitstafel für die Implikation auch $\mathcal{A}(F) = 1$ gelten und es folgt $M \models F$.

□

3 Vorüberlegungen zum Vollständigkeitsbeweis

Wir überlegen uns nun kurz, wie man die Vollständigkeit des Kalküls zeigen könnte. Wir müssen dazu beweisen, dass aus $M \models F$ stets $M \vdash F$ folgt. Induktion über die Ableitung wie beim Korrektheitsbeweis ist hier offensichtlich nicht möglich. Alternativ wäre es möglich, Induktion über den strukturellen Aufbau von F zu führen. Aber schon der Induktionsanfang scheint sehr schwierig zu sein. Wir müßten für eine atomare Formel A zeigen, dass aus $M \models A$ immer $M \vdash A$ folgt. Aber um $M \vdash A$ zu zeigen, müste man eine Ableitung von A , aufbauend auf den Axiomen, den Hypothesen in M und dem Modus Ponens, angeben. Wie soll das funktionieren?

Wir gehen also einen anderen Weg, der zunächst darin besteht, verwandte Konzepte auf der Kalkül-Ebene und der semantischen Ebene zu identifizieren. Wir zeigen unter anderem, dass \vdash und \models , sowie Konsistenz (wird noch definiert) und Erfüllbarkeit einander entsprechen.

4 Deduktionstheorem

Auf dem Weg zum Beweis der Vollständigkeit benötigt man nun einige Hilfssätze, sogenannte Lemmata (Plural von Lemma). Das erste Lemma ist relativ offensichtlich und einfach zu beweisen. Es besteht aus zwei Teilen und besagt folgendes: Wenn man zusätzlich Hypothesen zu M hinzufügt, so kann man immer noch alle Formeln herleiten, die vorher hergeleitet werden konnten. Man kann natürlich jetzt evtl. mehr Formeln als vorher ableiten. Des Weiteren kann man Formeln, die bereits aus einer Teilmenge von M ableiten kann, aus der Hypothesenmenge entfernen.

Lemma 4.1 *Seien F, G Formeln und M, M' Mengen von Formeln.*

- (1) *Falls $M \vdash F$ und $M \subseteq M'$ gelten, so gilt auch $M' \vdash F$.*
- (2) *Es gelte $M' \vdash F$ und $M \subseteq M'$. Außerdem gelte für alle $G \in M' - M$, dass $M \vdash G$. Dann folgt daraus $M \vdash F$.*

Beweis: Beide Beweise sind relativ einfach, wir geben nur kurze Hinweise und führen die Beweise selbst nicht im Detail aus.

- (1) Einfache Induktion über die Ableitung $M \vdash F$.
- (2) Durch Induktion über die Ableitung $M' \vdash F$. Die Verwendung einer Hypothese $G \in M' - M$ wird in der Ableitung $M \vdash F$ durch eine Ableitung von G aus M ersetzt.

□

Der erste wichtige Zwischenschritt zum Beweis der Vollständigkeit ist das folgende Deduktionstheorem. Im wesentlichen beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt und in den folgenden Abschnitten damit, zu zeigen, dass sich \vdash analog zu \models verhält. Und für \models kann man auf einfache Weise zeigen, dass $M \cup \{F\} \models G$ genau dann gilt, wenn $M \models F \rightarrow G$.

Theorem 4.2 (Deduktionstheorem) *Es gilt $M \cup \{F\} \vdash G$ genau dann, wenn $M \vdash F \rightarrow G$.*

Beweis:

\Leftarrow : Es gelte $M \vdash F \rightarrow G$. Dann gilt nach Lemma 4.1(1) auch $M \cup \{F\} \vdash F \rightarrow G$. Außerdem gilt $M \cup \{F\} \vdash F$. Mit dem Modus Ponens erhält man dann $M \cup \{F\} \vdash G$.

\Rightarrow : Es gelte $M \cup \{F\} \vdash G$. Wir führen Induktion über die dazugehörige Ableitung und unterscheiden die folgenden Fälle. Nur im letzten Fall muß die Induktionsvoraussetzung verwendet werden.

$G = F$: In diesem Fall folgt $M \vdash F \rightarrow F$ aus dem Beispiel in Abschnitt 1 und Lemma 4.1(1).

Axiom/Hypothese: Es gelte $G \neq F$ und G sei entweder die Instanz eines Axioms oder es gelte $G \in M$. In diesem Fall gilt $M \vdash G$. Außerdem folgern wir $M \vdash G \rightarrow (F \rightarrow G)$ als Instanz von Axiom (1). Aus dem Modus Ponens ergibt sich dann $M \vdash F \rightarrow G$.

Modus Ponens: Es gilt $M \cup \{F\} \vdash H \rightarrow G$ und $M \cup \{F\} \vdash H$ und $M \cup \{F\} \vdash G$ wurde aus den ersten beiden Ableitungen mit Hilfe des Modus Ponens hergeleitet. Aus der Induktionsvoraussetzung können wir dann schließen: $M \vdash F \rightarrow (H \rightarrow G)$ und $M \vdash F \rightarrow H$. Mit Axiom (2) erhält man $M \vdash (F \rightarrow (H \rightarrow G)) \rightarrow ((F \rightarrow H) \rightarrow (F \rightarrow G))$. Zweimalige Anwendung des Modus Ponens ergibt dann $M \vdash F \rightarrow G$.

□

Mit Hilfe des Deduktionstheorems kann man nun zwei Aussagen herleiten, die im weiteren Verlauf des Vollständigkeitsbeweises noch Bedeutung haben werden. Die erste dieser Aussagen besagt im Wesentlichen, dass man, sobald man eine Formel F und deren Negation $\neg F$ herleiten kann, jede beliebige Formel herleiten kann. Die zweite Aussage besagt, dass $\neg F$ niemals zur Herleitung von F beitragen kann.

Lemma 4.3 *Seien F, G beliebige Formeln. Folgende Aussagen gelten im Hilbert-Kalkül:*

(1) $F, \neg F \vdash G$

(2) $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ genau dann, wenn $M \vdash F$

Beweis:

(1) Mit Axiom (4) erhalten wir $\vdash F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$. Zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems ergibt dann $F, \neg F \vdash G$

(2) Wir nehmen zunächst an, dass $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ gilt. Mit dem Deduktionstheorem folgt dann $M \vdash \neg F \rightarrow F$. Außerdem folgt mit Axiom (5), dass $M \vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ gilt. Dann folgt $M \vdash F$ mit Hilfe des Modus Ponens.

Die umgekehrte Richtung folgt direkt aus Lemma 4.1(1).

□

5 Konsistenz

Zusätzlich zur Analogie von \vdash und \models führen wir einen weiteren Begriff ein, der eine Analogie auf der semantischen Seite hat: den Begriff der Konsistenz einer Menge, der - wie wir erst noch beweisen müssen - analog zur Erfüllbarkeit ist.

Definition 5.1 (Konsistenz) *Eine Menge M von Formeln heißt konsistent, falls es keine Formel F gibt, für die sowohl $M \vdash F$ als auch $M \vdash \neg F$ gilt. Die Menge M heißt inkonsistent, falls sie nicht konsistent ist.*

Eine Menge M von Formeln heißt maximal konsistent, falls sie konsistent ist und für jede Formel F gilt: $F \in M$ oder $\neg F \in M$.

Jede maximal konsistente Menge enthält natürlich unendlich viele Formeln.

Falls eine Menge M inkonsistent ist, d.h., falls sich aus M eine Formel und deren Negation ableiten lassen, so lassen sich erstaunlicherweise bereits *alle* möglichen Formeln aus M ableiten.

Lemma 5.2 *Sei M eine Menge von Formeln. Es gilt $M \vdash G$ für alle Formeln G genau dann, wenn M inkonsistent ist.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $M \vdash G$ für alle Formeln G gilt. Damit gibt es auch eine Formel F , für die $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$ gilt, womit die Inkonsistenz von M gezeigt ist.

Sei nun M inkonsistent. Damit gibt es eine Formel F für die gilt $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$. Nach Lemma 4.3(1) gilt $F, \neg F \vdash G$. Mit Lemma 4.1(1) folgt dann $M \cup \{\neg F, F\} \vdash G$ und aus Lemma 4.1(2) können wir $M \vdash G$ herleiten. \square

Eine konsistente Menge M kann konsistent erweitert werden, wenn man für eine gegebene Formel F die Formel F selbst oder deren Negation zu M hinzufügt. Unter Umständen können auch beide Mengen konsistent sein.

Lemma 5.3 *Sei M eine konsistente Menge und sei F eine beliebige Formel. Dann gilt: $M \cup \{F\}$ konsistent oder $M \cup \{\neg F\}$ konsistent.*

Beweis: Wir nehmen an, dass M konsistent ist und dass sowohl $M \cup \{F\}$ als auch $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent sind. Dann gilt mit Lemma 5.2: $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ und $M \cup \{F\} \vdash \neg F$. Aus der ersten Aussage folgt mit Lemma 4.3(2), dass $M \vdash F$ gilt. Da $M \cup \{F\} \vdash \neg F$ und $M \vdash F$ gilt, dann kann man aus Lemma 4.1(2) folgern, dass $M \vdash \neg F$ gilt. Daraus folgt aber, dass M bereits inkonsistent ist, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. \square

Wir müssen jetzt noch zwei Zwischenschritte machen, bevor wir zeigen können, dass aus der Konsistenz einer Menge auch deren Erfüllbarkeit folgt. Der erste Zwischenschritt heißt Lindenbaumscher Erweiterungssatz. Warum dieser Satz nützlich ist, kann man sich mit folgender Überlegung klarmachen: Wenn wir zeigen wollen, dass eine konsistente Menge M erfüllbar ist, so müssen wir eine konkrete Belegung \mathcal{A} angeben, die ein Modell für alle Formeln in M ist. Dazu müssen wir jeder atomaren Formel A , die in M vorkommt, einen Wahrheitswert zuordnen. Wenn A in M enthalten ist, so ist diese Zuordnung eindeutig, wir müssen $\mathcal{A}(A) = 1$ setzen. Falls $\neg A$ in M enthalten ist, so müssen wir $\mathcal{A}(A) = 0$ setzen. Was machen wir aber, wenn weder A noch $\neg A$ in M enthalten sind? Bei einer maximal konsistenten Menge kann

dieser Fall nicht eintreten, entweder A oder $\neg A$ sind in der Menge enthalten. Daher verwenden wir folgenden Trick: wir erweitern eine konsistente Menge M zunächst zu einer maximal konsistenten Menge und bestimmen dann für diese die Belegung \mathcal{A} .

Folgender Satz besagt, dass man tatsächlich jede Menge M entsprechend erweitern kann. Man beachte, dass diese Erweiterung nicht eindeutig ist, sondern von der im Beweis verwendeten Formel-Aufzählung abhängt.

Satz 5.4 (Lindenbaumscher Erweiterungssatz) *Jede konsistente Menge M kann zu einer maximal konsistenten Menge \overline{M} mit $M \subseteq \overline{M}$ erweitert werden.*

Beweis: Wir erweitern M folgendermaßen: Sei $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$ eine (unendlich lange) Aufzählung aller Formeln. Diese Aufzählung kann man beispielsweise folgendermaßen erhalten: Man erzeugt für alle $i = 1, 2, 3, \dots$ alle Formeln der Länge kleiner gleich i , die nur atomare Formeln A_j mit $j \leq i$ enthalten. Dabei kann man bereits früher erzeugte Formeln aus der Aufzählung weglassen.

Es gelte $M_0 = M$ und wir bestimmen M_{i+1} induktiv aus M_i wie folgt:

$$M_{i+1} = \begin{cases} M_i \cup \{F_i\} & \text{falls } M_i \cup \{F_i\} \text{ konsistent} \\ M_i \cup \{\neg F_i\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus Lemma 5.3 und mit vollständiger Induktion folgt dann, dass alle der unendlichen vielen Mengen M_i konsistent sind.

Wir definieren $\overline{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ und zeigen, dass auch \overline{M} konsistent ist. Angenommen, \overline{M} wäre nicht konsistent, dann gibt es nach Definition 5.1 eine Formel F für die $\overline{M} \vdash F$ und $\overline{M} \vdash \neg F$ gilt. Nach der Definition von Ableitungen können auch nur endlich viele Formeln aus \overline{M} für diese Herleitungen benutzt worden sein. Es gibt daher bereits eine Menge M_{i_0} , die alle diese Formeln enthält und es gilt auch $M_{i_0} \vdash F$ und $M_{i_0} \vdash \neg F$. Damit ist M_{i_0} inkonsistent, was im Widerspruch zum oben Gezeigten steht. Damit ist also \overline{M} konsistent.

Die Menge \overline{M} ist aber auch maximal konsistent, denn jede Formel F wird irgendwann aufgezählt, was bedeutet, dass entweder F oder $\neg F$ in \overline{M} enthalten ist. \square

Um im Beweis zu Satz 5.6 erfolgreich Induktion über den Aufbau einer Formel führen zu können, benötigt man noch einige Eigenschaften maximal konsistenter Mengen.

Lemma 5.5 (Eigenschaften maximal konsistenter Mengen) *Für eine maximal konsistente Menge M gilt:*

- (1) *Für alle Formeln F gilt $F \in M$ genau dann, wenn $M \vdash F$.*
- (2) *Für alle Formeln F gilt $\neg F \in M$ genau dann, wenn $F \notin M$.*
- (3) *Für zwei Formeln F, G gilt $F \rightarrow G \in M$ genau dann, wenn $F \notin M$ oder $G \in M$.*

Beweis:

- (1) Aus $F \in M$ folgt unmittelbar $M \vdash F$. Es gelte nun also $M \vdash F$. Nach Definition 5.1 muß entweder $F \in M$ oder $\neg F \in M$ gelten. Würde $\neg F \in M$ gelten, so könnte man $M \vdash \neg F$ folgern und M wäre inkonsistent, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher gilt $F \in M$.
- (2) Diese Eigenschaft maximal konsistenter Mengen ergibt sich direkt aus Definition 5.1.

- (3) Wir nehmen zunächst an, dass $F \rightarrow G \in M$ gilt und zeigen, dass $F \notin M$ oder $G \in M$. Falls $F \notin M$, so sind wir fertig, andernfalls gilt $F \in M$ und aus (1) folgt $M \vdash F$. Aus $M \vdash F \rightarrow G$ und $M \vdash F$ kann man mit dem Modus Ponens $M \vdash G$ ableiten. Und daraus folgt mit (1) $G \in M$.

Es gelte nun $F \notin M$ oder $G \in M$ und wir zeigen $F \rightarrow G \in M$. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

- Sei $F \notin M$, dann folgt daraus, dass $\neg F \in M$ und wir erhalten folgende Ableitung:

1. $M \vdash \neg F$	wegen $\neg F \in M$
2. $M \vdash \neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$	Axiom (1)
3. $M \vdash \neg G \rightarrow \neg F$	Modus Ponens aus 1. & 2.
4. $M \vdash (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$	Axiom (3)
5. $M \vdash F \rightarrow G$	Modus Ponens aus 3. & 4.

- Sei $G \in M$, dann ergibt sich folgende Ableitung:

1. $M \vdash G$	wegen $G \in M$
2. $M \vdash G \rightarrow (F \rightarrow G)$	Axiom (1)
3. $M \vdash F \rightarrow G$	Modus Ponens aus 1. & 2.

In beiden Fällen ergibt sich also $M \vdash F \rightarrow G$ und daraus schließen wir mit (1) $F \rightarrow G \in M$.

□

Wir zeigen nun, wie angekündigt, dass eine konsistente Menge immer auch erfüllbar ist. Es gilt übrigens auch die andere Richtung: Jede erfüllbare Menge ist konsistent. Dies kann man relativ leicht zeigen.

Satz 5.6 (Konsistenz und Erfüllbarkeit) *Jede konsistente Menge M ist erfüllbar.*

Beweis: Sei M eine konsistente Menge, die sich nach Satz 5.4 zu einer maximal konsistenten Menge \overline{M} erweitern läßt. wenn \overline{M} erfüllbar ist, dann muß auch M erfüllbar sein. Wir definieren nun eine Belegung \mathcal{A} wie folgt: Für eine atomare Formel A gilt $\mathcal{A}(A) = 1$ genau dann, wenn $A \in \overline{M}$. Wir zeigen nun für eine beliebige Formel F durch strukturelle Induktion über den Formelaufbau, dass $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt, genau dann, wenn $F \in \overline{M}$.

Atomare Formel: Sei $F = A$ eine atomare Formel. Dann gilt nach Definition von \mathcal{A} , dass $F = A \in \overline{M}$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(A) = 1$.

Negation: Es gelte $F = \neg G$. Mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.5(2) folgern wir: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 0$ gdw. $G \notin \overline{M}$ gdw. $\neg G \in \overline{M}$ gdw. $F \in \overline{M}$.

Implikation: Es gelte $F = F_1 \rightarrow F_2$. Mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.5(3) folgert man: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F_1 \rightarrow F_2) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F_1) = 0$ oder $\mathcal{A}(F_2) = 1$ gdw. $F_1 \notin \overline{M}$ oder $F_2 \in \overline{M}$ gdw. $F_1 \rightarrow F_2 \in \overline{M}$ gdw. $F \in \overline{M}$.

□

6 Vollständigkeit

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass aus $M \models F$ stets $M \vdash F$ folgt. Dazu machen wir folgende Betrachtung: Zunächst einmal gilt $M \models F$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist. Wir wie in Lemma 6.1 sehen werden, gilt analoges auch im Kalkül: Es gilt $M \vdash F$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist. Also bleibt, um die Vollständigkeit zu beweisen, nur noch zu zeigen, dass aus der Unerfüllbarkeit einer Menge deren Inkonsistenz folgt. Dies haben wir mit Satz 5.6 bereits getan. Wie wir bereits gesehen haben, ist es einfacher, von der Ableitbarkeit im Kalkül auf den semantischen Folgerungsbegriff zu schließen. Auch der Beweis von Satz 5.6 argumentiert in diese (einfachere) Richtung.

Lemma 6.1 *Es gilt $M \vdash F$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist.*

Beweis: Falls $M \vdash F$, dann gilt auch $M \cup \{\neg F\} \vdash F$. Außerdem gilt offensichtlich $M \cup \{\neg F\} \vdash \neg F$ und damit ist $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent.

Es sei nun $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent. Dann folgt mit Lemma 5.2, dass $M \cup \{\neg F\} \vdash F$. Und mit Lemma 4.3(2) folgt dann $M \vdash F$. \square

Das folgende Theorem und der Beweis fassen nur noch die weiter oben erläuterten Ideen zusammen.

Theorem 6.2 (Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls) *Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel, M eine Menge von Formeln und es gelte $M \models F$. Dann folgt daraus auch $M \vdash F$.*

Beweis: Es gelte $M \models F$, dann kann man daraus schließen, dass $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist. Dann muß die Menge $M \cup \{\neg F\}$ aufgrund von Satz 5.6 inkonsistent sein. Und daraus folgt mit Lemma 6.1, dass $M \vdash F$. \square

Bemerkung: Eigentlich sind Axiom (4) und Axiom (5) gar nicht unbedingt nötig, um die Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls zu erreichen. Diese beiden Axiome können bereits aus den restlichen drei Axiomen hergeleitet werden (siehe Anhang A).

Literatur

[Eic93] Jürgen Eickel. “Mathematische Logik” (Vorlesung an der Technischen Universität München). Handschriftliche Mitschrift, Wintersemester 1992/1993.

[KL94] Hans Kleine Büning and Theodor Lettmann. *Aussagenlogik: Deduktion und Algorithmen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

A Verkleinerung der Axiomenmenge

Wie weiter oben bemerkt, kann man auf die Axiome (4) und (5) verzichten, weil sie aus den anderen Axiomen herleitbar sind. Es ist zu beachten, daß die beiden letzten Axiome *nicht* zur Herleitung des Deduktionstheorems (Theorem 4.2) verwendet wurden, wir können also dieses Theorem einsetzen, um die Ableitbarkeit der beiden Axiome aus den ersten drei Axiomen zu zeigen.

Wir zeigen zunächst, daß $\neg F \vdash F \rightarrow G$ im Kalkül herleitbar ist, wobei nur die Axiome (1)–(3) verwendet werden.

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $\neg F \vdash \neg F$ | Hypothese |
| 2. $\neg F \vdash \neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$ | Instanz von Axiom (1) |
| 3. $\neg F \vdash \neg G \rightarrow \neg F$ | Modus Ponens aus 1. & 2. |
| 4. $\neg F \vdash (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$ | Instanz von Axiom (3) |
| 5. $\neg F \vdash F \rightarrow G$ | Modus Ponens aus 3. & 4. |

Aus $\neg F \vdash F \rightarrow G$ kann dann durch mehrmalige Anwendung des Modus Ponens $\vdash F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$ hergeleitet werden. Dies entspricht Axiom (4).

Um $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ zu zeigen, beweisen wir zunächst die sogenannte Kettenschlußregel: $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$. Dazu zeigt man zunächst $F, F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash H$ (zweimalige Anwendung des Modus Ponens) und leitet dann die Kettenschlußregel mit Hilfe des Deduktionstheorems ab.

Jetzt können wir $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ beweisen:

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. $\vdash \neg F \rightarrow (\neg\neg(\neg F \rightarrow F) \rightarrow \neg F)$ | Instanz von Axiom (1) |
| 2. $\vdash (\neg\neg(\neg F \rightarrow F) \rightarrow \neg F) \rightarrow$
$(F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F))$ | Instanz von Axiom (3) |
| 3. $\vdash \neg F \rightarrow (F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F))$ | Kettenschluß aus 1. & 2. |
| 4. $\vdash (\neg F \rightarrow (F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F))) \rightarrow$
$((\neg F \rightarrow F) \rightarrow (\neg F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F)))$ | Instanz von Axiom (2) |
| 5. $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow (\neg F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F))$ | Modus Ponens aus 3. & 4. |
| 6. $\neg F \rightarrow F \vdash \neg F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F)$ | Mit Ded.thm. aus 5. |
| 7. $\neg F \rightarrow F \vdash (\neg F \rightarrow \neg(\neg F \rightarrow F)) \rightarrow$
$((\neg F \rightarrow F) \rightarrow F)$ | Instanz von Axiom (3) |
| 8. $\neg F \rightarrow F \vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ | Modus Ponens aus 6. & 7. |
| 9. $\neg F \rightarrow F \vdash F$ | Mit Ded.thm. aus 8. |
| 10. $\vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ | Mit Ded.thm. aus 9. |

Damit haben wir gezeigt, daß man auch ohne Axiom (5) auskommen kann.