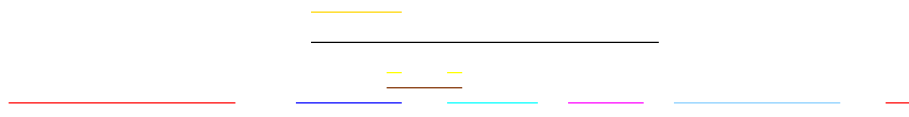


A7.1



Teil a:

Nach Aufgabenblatt 5 reicht es zu überprüfen, dass Teilmenge von Elementen aus A ein Infimum in A besitzt. Da A endlich ist, reicht es dafür aus, je zwei Elemente von A zu betrachten. Man sieht dann, z.B. anhand einer entsprechenden Skizze, sehr einfach, dass der Schnitt entweder leer ist, oder bei nicht leerem Schnitt \perp die einzige untere Schranke und damit schon das Infimum ist. (A, \sqsubseteq) ist somit bereits ein vollständiger Verband.

Teil b:

Zunächst zum Hinweis:

Für $a, b \in A$ sei $S := \gamma(a) \cap \gamma(b)$ und $a_S = \sqcap \{a' \in A \mid S \subseteq \gamma(a')\}$. Da γ als wohlgeformt vorausgesetzt ist, muss nach Definition $S \subseteq \gamma(a_S)$ gelten.

Mit $S \subseteq \gamma(a)$ und $S \subseteq \gamma(b)$ folgt zunächst, dass $a, b \in \{a' \in A \mid S \subseteq \gamma(a')\}$ und damit $a_S \sqsubseteq a, b$ gilt, da a_S das Infimum dieser Menge. Nach Definition von \sqsubseteq gilt also $\gamma(a_S) \subseteq \gamma(a)$ und $\gamma(a_S) \subseteq \gamma(b)$, womit $\gamma(a_S) \subseteq S = \gamma(a) \cap \gamma(b)$ folgt.

Es folgt also $\gamma(a_S) = \gamma(a) \cap \gamma(b)$, d.h. a_S ist das gesuchte c .

Das heißt also, damit γ wohlgeformt sein kann, muss man zunächst überprüfen, dass der Schnitt zweier Elemente $a, b \in A$ wieder in A liegt. Gilt andererseits diese Eigenschaft, dann folgt (zumindest im Fall, dass A endlich ist), dass γ auch wohlgeformt ist, da dann einfach zu S ein Element a_S mit $\gamma(a_S) = \cap \{\gamma(a) \mid a \in A \wedge S \subseteq \gamma(a)\}$ existiert nach obigem.

Bei Betrachtung einer geeigneten Skizze erkennt man dann, dass einzig die Schnitte von 'Morgen' und 'Vormittag' und 'Vormittag' und 'Mittag' hinzugefügt werden müssen (kleine gelbe Striche in obiger Skizze).

Teil c:

Da die geforderte 'Wohlgeformtheit' von γ es erforderlich macht, dass die 'mengentheoretischen Infima' in A repräsentiert werden, reicht es, diese Schnitte notfalls mitaufzunehmen. Man erhält dann noch das zusätzliche Element zum Schnitt von 'Uni' und 'Morgen' (oberster Balken in der Skizze).

A7.2

Teil a:

$$\alpha_0 : 2^{\text{integer}} \rightarrow A_0 : S \mapsto \begin{cases} \perp & \text{falls } S = \emptyset \\ v & \text{falls } S = \{v\} \\ \top & \text{sonst} \end{cases}$$

Teil b:

Bemerkung: Die eigentliche Abstraktion hat mit (a, b) und $a = \perp \vee b = \perp$ mehrere Elemente mit $\gamma((a, b)) = \emptyset$, im Sinne von A7.3 ist die Galois-Verbindung damit nicht reduziert. Hier wird (\perp, \perp) stellvertretend für alle diese Elemente verwendet.

$$\begin{aligned} [\text{is Even}(x)]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (\top, b) & \text{falls } a = \top \\ (\perp, \perp) & \text{falls } a \text{ ungerade} \\ (a, b) & \text{falls } a \text{ gerade} \end{cases} \\ [\neg \text{is Even}(x)]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (\top, b) & \text{falls } a = \top \\ (\perp, \perp) & \text{falls } a \text{ gerade} \\ (a, b) & \text{falls } a \text{ ungerade} \end{cases} \\ [y:=2]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (a, 2) & \text{sonst} \end{cases} \\ [y:=-2]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (a, -2) & \text{sonst} \end{cases} \\ [x:=x(y+2)(y-2)]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (\top, b) & \text{falls } \#\{x(y-2)(y+2) \mid (x, y) \in \gamma((a, b))\} > 1 \\ (r, b) & \text{falls } \{r\} = \{x(y-2)(y+2) \mid (x, y) \in \gamma((a, b))\} \end{cases} \\ [x=0]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (0, b) & \text{falls } a = \top \vee a = 0 \\ (\perp, \perp) & \text{sonst} \end{cases} \\ [\neg x=0]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (\top, b) & \text{falls } a = \top \\ (a, b) & \text{falls } a \neq 0 \\ (\perp, \perp) & \text{sonst} \end{cases} \\ [y:=1]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (a, 1) & \text{sonst} \end{cases} \\ [y:=3]^\#((a, b)) &= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{falls } a = \perp \vee b = \perp \\ (a, 3) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Teil c+d:

l_0	(\top, \top)	(\top, \top)
l_1	(\top, \top)	(\top, \top)
l_2	(\top, \top)	(\top, \top)
l_3	$(\top, 2), (\top, -2)$	$\sqcup\{(\top, 2), (\top, -2)\} = (\top, \top)$
l_4	$(0, 2), (0, -2)$	(\top, \top)
l_5	$(0, 2), (0, -2)$	$(0, \top)$
l_6	(\perp, \perp)	(\top, \top)
l_7	$(0, 1)$	$\sqcup\{(0, 1), (\top, 3)\} = (\top, \top)$

A7.3

$$* := \forall a \in A \forall c \in C : \alpha(c) \sqsubseteq a \Leftrightarrow c \leq \gamma(a)$$

(a)

$$\gamma(a) \leq \gamma(a) \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha\gamma(a) \sqsubseteq a \tag{1}$$

$$\alpha(c) \sqsubseteq \alpha(c) \stackrel{*}{\Rightarrow} c \leq \gamma\alpha(c) \tag{2}$$

(b)

$$a \sqsubseteq b \stackrel{\alpha\gamma(a) \sqsubseteq a}{\Rightarrow} \alpha\gamma(a) \sqsubseteq b \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma(a) \leq \gamma(b) \tag{3}$$

$$c \leq d \stackrel{d \leq \gamma\alpha(d)}{\Rightarrow} c \leq \gamma\alpha(d) \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha(c) \sqsubseteq \alpha(d) \tag{4}$$

(c)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha\gamma(a) \sqsubseteq \alpha\gamma(a) \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma(a) \leq \gamma\alpha\gamma(a) \\ \alpha\gamma(a) \sqsubseteq a \stackrel{\gamma \text{ mon.}}{\Rightarrow} \gamma\alpha\gamma(a) \leq \gamma(a) \end{array} \right\} \gamma = \gamma\alpha\gamma \tag{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma\alpha(c) \leq \gamma\alpha(c) \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha\gamma\alpha(c) \sqsubseteq \alpha(c) \\ c \leq \gamma\alpha(c) \stackrel{\alpha \text{ mon.}}{\Rightarrow} \alpha(c) \sqsubseteq \alpha\gamma\alpha(c) \end{array} \right\} \alpha = \alpha\gamma\alpha \tag{6}$$

(d) Sei γ injektiv und $a \in A$ beliebig. Dann gilt nach (5) $\gamma(a) = \gamma\alpha\gamma(a)$. Da γ injektiv ist, muss $a = \alpha\gamma(a)$ gelten, womit $\gamma(a)$ ein Urbild unter α von a ist. Da a beliebig gewählt war, folgt, dass α surjektiv ist.

Sei α surjektiv und $a, b \in A$ beliebig mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Da α surjektiv ist, existiert ein Urbild c von a und ein Urbild d von b , d.h. $\alpha(c) = a$ und $\alpha(d) = b$. Nach (6) gilt

$$a = \alpha(c) = \alpha\gamma\alpha(c) = \alpha\gamma(a) = \alpha\gamma(b) = \alpha\gamma\alpha(d) = \alpha(d) = b,$$

also $a = b$, d.h. γ ist injektiv.

- (e) Sei γ injektiv und es gelte $a \neq \alpha\gamma(a)$ für ein $a \in A$. Da γ injektiv ist, folgt auch $\gamma(a) \neq \gamma\alpha\gamma(a)$, was aber (c) widerspricht.

Es gelte $\alpha\gamma = \text{id}_A$. Man nehme wieder $a, b \in A$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann folgt sofort (vgl. (d)) $a = \alpha\gamma(a) = \alpha\gamma(b) = b$, also $a = b$ bzw. γ injektiv.

- (f) Ist α gegeben, so sei für $a \in A$

$$U_a = \{c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq a\}.$$

Man nehme an, dass ein γ existiert, so dass (α, γ) eine Galois-Verbindung bilden. Dann folgt mit *:

$$U_a = \{c \in C \mid c \leq \gamma(a)\}.$$

Da speziell $\gamma(a) =: c_a \in C$ gilt, folgt $c_a \in U_a$. Damit folgt weiterhin $c_a \leq c'$ für jedes $c' \in C$ mit $U_a \leq c'$ (d.h. c' ist eine obere Schranke von U_a). Nach Definition von U_a ist aber c_a auch eine obere Schranke von U_a und damit also die kleinste, das heißt U_a hat ein eindeutig bestimmtes Supremum, nämlich c_a , insbesondere ist c_a das Maximum der Menge U_a .

Damit existiert $c_a = \bigwedge U_a$ immer, wenn sich α zu einer Galois-Verbindung ergänzen lässt. Die Behauptung in der Aufgabenstellung war damit **falsch**, es wird nicht benötigt, dass (C, \leq) ein vollständiger Verband ist (danke an Jürn und Matthias).

Es folgt, wie getestet werden kann, ob ein solches γ existieren und ggf. definiert werden kann: Es muss „nur“ überprüft werden, ob für jedes $a \in A$ die Menge U_a ein Maximum besitzt und $\gamma(a)$ als dieses Maximum definiert werden.

Ein entsprechender Beweis zeigt dann auch, dass $\alpha(c) = \sqcap\{a \in A \mid c \leq \gamma(a)\}$ gilt und dass γ entsprechend α - soweit existent - bereits vollständig bestimmt.

- (g) Als erstes muss gezeigt werden, dass $(\pi, \iota) *$ erfüllen. Sei $c \in C$ und $d \in \pi(C) \subseteq C$. Insbesondere gilt nach Voraussetzung $\pi(d) = d$, womit

$$\pi(c) \leq d \stackrel{c \leq \pi(c)}{\Leftrightarrow} c \leq d \Leftrightarrow c \leq \iota(d)$$

folgt.

Wir müssen noch $\pi = \pi\iota = \text{id}_{\pi(C)}$ zeigen, was aber wegen der vorausgesetzten Idempotenz $\pi\pi = \pi$ für alle $d \in \pi(C)$ sofort folgt.

- (h) In einer reduzierten Galois-Verbindung ist α nach Definition surjektiv, wir finden also zu $a, b \in A$ Urbilder c, d , so dass folgt:

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \alpha(c) \sqsubseteq \alpha(d) \stackrel{*}{\Leftrightarrow} c \leq \gamma\alpha(d) \stackrel{\gamma\alpha = \text{id}_A}{\Leftrightarrow} c \leq d$$

- (i) Wir wissen bereits, dass mit (α, γ) eine reduzierte Galois-Verbindung aus $(\alpha\gamma, \iota)$ eine reduzierte Galois-Verbindung ist (siehe (g)). Weiter ist γ injektiv und erhält die Ordnungen (h) (jeweils da (α, γ) reduziert). Da γ injektiv ist, ist γ insbesondere bijektiv auf dem Bild $\gamma(A)$. Da α surjektiv, folgt weiter $A = \alpha(C)$, also ist γ bijektiv zwischen A und $\gamma\alpha(C) = \gamma(A)$, d.h. γ ist ein Isomorphismus zwischen A und $\gamma\alpha(C)$.

Wir haben also ein Rezept, um aus jeder Galois-Verbindung (α, γ) eine reduzierte zu erhalten, indem o.E. zu $(\gamma\alpha, \iota)$ übergegangen wird.

- (j) Da (α, γ) reduziert, gehen wir o.E. zu $(\pi(C), \iota)$ mit $\pi = \gamma\alpha$ über. Sei $T \subseteq \pi(C)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass T ein Infimum in $\pi(C)$ hat (vgl. Übungsblatt 5).

T hat zunächst ein Infimum $\bigwedge T$ in (C, \leq) . Wir zeigen (siehe auch A7.2-b), dass $\bigwedge T$ auch in $(\pi(C), \leq)$ existiert. Dazu reicht es zu zeigen, dass $\pi(\bigwedge T) = \bigwedge T$ gilt.

Wegen $\bigwedge T \leq t$ für jedes $t \in T$ und π monoton folgt $\pi(\bigwedge T) \leq \pi(t) = t$. Also ist $\pi(\bigwedge T)$ eine untere Schranke von T sowohl in $\pi(C)$ als auch in C , womit $\pi(\bigwedge T) \leq \bigwedge T$ gelten muss.

Andererseits ist π nach Voraussetzung monoton wachsend, d.h. es gilt $\bigwedge T \leq \pi(\bigwedge T)$.

Insgesamt folgt die Behauptung $\bigwedge T = \pi(\bigwedge T)$ und damit $\bigwedge T \in \pi(C)$.

Es folgt nicht nur, dass $(\pi(C), \leq)$ ein vollständiger Verband ist, da jede Menge ein Infimum besitzt, viel mehr stimmt das Infimum auf $(\pi(C), \leq)$ mit dem auf (C, \leq) bereits überein. Hiermit folgt sofort, dass ι im Sinne der Vorlesung wohlgeformt ist. Entsprechend ergibt sich auch, dass γ wohlgeformt ist. Man sieht hiermit, dass die Voraussetzung an (A, \sqsubseteq) ein vollständiger Verband zu sein, notwendig ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\pi(\bigvee T)$ das Supremum von T in $\pi(C)$ ist. $\pi(\bigvee T)$ ist sicherlich eine obere Schranke von T in $\pi(C)$, da π monoton wachsend. Sei also $o \in \pi(C)$ eine beliebige weitere obere Schranke von T . Dann ist o natürlich auch eine obere Schranke in C von T , so dass $\bigvee T \leq o$ und damit $\pi(\bigvee T) \leq \pi(o) = o$ folgt. Also ist $\pi(\bigvee T)$ das Supremum von T in $\pi(C)$.

- (k) Es reicht zu zeigen, dass γ definiert durch $\gamma((a_i)_{i \in I}) = \bigwedge \{\gamma_i(a_i) \mid i \in I\}$ mit α eine Galois-Verbindung bildet. Dann ist γ bereits eindeutig bestimmt.

Seien $a_i \in A_i$ für $i \in I$ beliebig und $c \in C$ beliebig. Es muss * gezeigt werden. * gilt für jedes festes $i \in I$ nach Voraussetzung.

Aus $\alpha(c) \sqsubseteq (a_i)_{i \in I}$ folgt dann $\forall i \in I : c \leq \gamma_i(a_i)$, also auch $\bigwedge \{\gamma_i(a_i) \mid i \in I\}$, da c eine untere Schranke dieser Menge in C ist. Somit gilt zunächst $\alpha(c) \sqsubseteq (a_i)_{i \in I} \Rightarrow c \leq \gamma((a_i)_{i \in I})$.

Die andere Richtung folgt durch Umkehren der Implikationen.

Hinweis: Mit (α_i, γ_i) reduziert muss (α, γ) noch nicht reduziert sein, siehe auch A7.2.