Algorithmik

Aufgabenblatt 2

Besprechung: Freitag, 13. November 2009 *Musterlösung*

1. *Randomisierte Suchbäume*

Sei T ein Treap über der Ordnung $(X = \{1, \ldots, n\}, <)$ mit der Prioritätsfunktion $p : X \mapsto [0, 1]$. Es bezeichne $m \in X$ einen Knoten, $A \subseteq X$ alle Knoten auf dem Weg von $\mathbf{root}(T)$ zu m und $m_{\leq} = \{1, \ldots, m\}$.

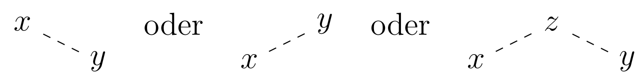
Zeigen Sie, dass für alle $x \in m_{\leq}$ gilt:

$$x \in A \Leftrightarrow \forall y \in m_{\leq} : p(y) > p(x) \rightarrow x > y.$$

Lösung:

Seien x und y zwei Knoten mit $x < y$. Ihre Positionen im Baum können in folgender Relation zueinander stehen:

- y steht im rechten Unterbaum von x.
  $\Rightarrow p(x) > p(y)$.
- x steht im linken Unterbaum von y.
  $\Rightarrow p(x) < p(y)$.
- Es existiert ein gemeinsamer Vorgänger z, sodass x im linken und y im rechten Unterbaum von z steht.
  $\Rightarrow x < z < y$, $p(x) < p(z)$ und $p(y) < p(z)$.



„$\Rightarrow$“: Sei $x \in A \cap m_{\leq}$.

Angenommen es existiert ein $y \in m_{\leq}$, mit $p(y) > p(x)$ und $y > x$. (Der Fall $x = m$ ist damit ausgeschlossen.)

Falls y Vorgänger von x ist, so würde x im linken und m im rechten Unterbaum von y stehen, also $x \notin A$ — Widerspruch.

Ansonsten existiert ein z, sodass x im linken und y im rechten Unterbaum von z steht. Es gilt $x < z < y < m$ und damit kann m nicht im linken Unterbaum von z liegen — Widerspruch.

„$\Leftarrow$“: Für $x \in m_{\leq}$ gilt: $\forall y \in m_{\leq} : p(y) > p(x) \rightarrow x > y$.

Der Fall $x = m$ ist trivial, also sei $x < m$. Falls $p(x) < p(m)$ wäre das ein Widerspruch, also können wir annehmen, dass $p(x) > p(m)$.

Falls $x \notin A$, also x ist kein Vorgänger von m, dann muss es einen Knoten z geben, sodass x im linken Unterbaum von z liegt und m im rechten Unterbaum. Daraus folgt $z > x$ und $p(z) > p(x)$ — Widerspruch.

Es bleibt der Fall $x \in A$.